

שלוש שאלות בטריגונומטריה

שאלה 1

AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O ואורך מחוגו R.

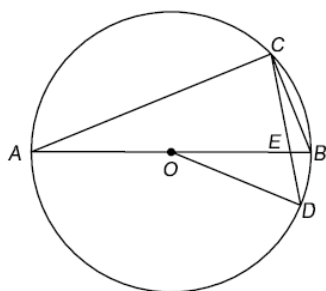
המיתר CD חותך את הקוטר AB בנקודה E.

נתון: $\angle BAC = \angle BOD = \alpha$.

א. הבע באמצעות R ו- α את שטח המשולש BCD.

ב. נתון גם: $BC = \sqrt{3}R$, $S_{\triangle BCD} = 8\sqrt{3}$.

חשב את אורך הרדיוס.



פתרון

$$\triangle ABC: (1) \angle C = 90^\circ \Rightarrow (2) BC = 2R \sin \alpha$$

$$(3) \angle BOD = \alpha \Rightarrow (4) \angle BCD = \frac{\alpha}{2}$$

$$(5) \angle BAC = \angle BDC = \alpha \Rightarrow (6) \angle DBC = 180^\circ - \frac{3\alpha}{2}$$

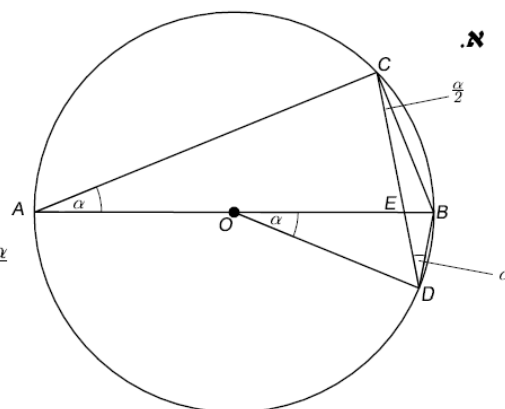
$$\triangle BCD: (2) \frac{BC}{\sin \angle D} = \frac{DC}{\sin \angle B}$$

$$\Rightarrow \frac{2R \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{DC}{\sin (180^\circ - \frac{3\alpha}{2})}$$

$$\Rightarrow (7) DC = 2R \sin \frac{3\alpha}{2}$$

$$S_{\triangle BCD} = \frac{BC \cdot DC \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{2R \sin \alpha \cdot 2R \sin \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle BCD} = 2R^2 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2} \quad (\text{יחידות ריבועיות})$$



ב.

$$BC = \sqrt{3} R, S_{\triangle BCD} = 8\sqrt{3}, R = ?$$

$$BC = 2R \sin \alpha = \sqrt{3} R \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$S_{\triangle BCD} = 2R^2 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2} = 2R^2 \sin 60^\circ \sin 30^\circ \sin 90^\circ = 2R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} R^2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} R^2 \stackrel{(3)}{=} 8\sqrt{3} \Rightarrow R^2 = 16 \Rightarrow R = 4 \text{ (יחידות אורך)}$$

(1) זווית היקפית הנשענת על קוטר היא שווית ישרה

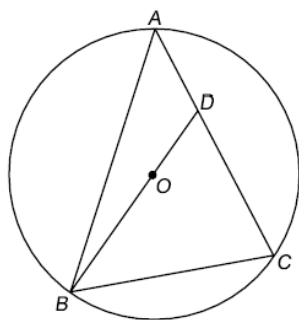
(2) משפט הסינוסים (3) נתון

(4) זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת

(5) זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת - שוות זו לזו

(6) השלמה ל- 180° במשולש BCD (7) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

שאלה 2



משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O.

D היא נקודה פנימית על הצלע AC,

כך ש-BD עובר דרך מרכז המעגל.

נתון: $\angle ABD = \alpha$, $\angle DBC = \beta$.

א. הבע באמצעות α ו- β את היחס $\frac{AD}{DC}$.

ב. הראה כי לא יתכן שהיחס $\frac{AD}{DC}$ שווה ל- $\frac{1}{2}$, אם $\alpha = \frac{1}{2}\beta$.

ג. מצא את היחס $\frac{AD}{DC}$, כאשר AC הוא קוטר. נמק.

פתרון

א. בנית עזר: הרדיוסים OA ו-OC. נסמן: $\angle ADB = \gamma \Leftrightarrow \angle BDC = 180^\circ - \gamma$

זוויות היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת:

$$\angle AOD = 2 \angle ABD = 2\alpha, \quad \angle COD = 2 \angle CBD = 2\beta$$

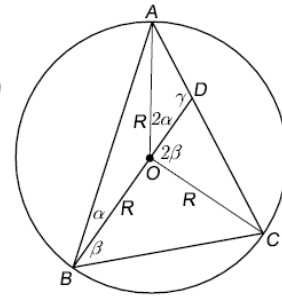
משפט הסינוסים:

$$\triangle AOD: \frac{AD}{\sin 2\alpha} = \frac{R}{\sin \gamma} \Rightarrow AD = \frac{R \sin 2\alpha}{\sin \gamma}$$

$$\triangle COD: \frac{DC}{\sin 2\beta} = \frac{R}{\sin (180^\circ - \gamma)} = \frac{R}{\sin \gamma} \Rightarrow DC = \frac{R \sin 2\beta}{\sin \gamma}$$

$\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{R \sin 2\alpha}{\sin \gamma} : \frac{R \sin 2\beta}{\sin \gamma} = \frac{R \sin 2\alpha}{\sin \gamma} \cdot \frac{\sin \gamma}{R \sin 2\beta} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}$$



ב.

$$\alpha = \frac{1}{2}\beta \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta} = \frac{\sin \beta}{\sin 2\beta} = \frac{\sin \beta}{2 \sin \beta \cos \beta} = \frac{1}{2 \cos \beta} \neq \frac{1}{2} \quad (\checkmark)$$

$\beta \neq 0^\circ \Rightarrow \cos \beta \neq 1$
 $\beta \neq 0 \Rightarrow \sin \beta \neq 0$

ג. כאשר AC הוא קוטר - המשולש AOC הוא משולש ימני:

O, A, C הינם על קו ישר אחד, שהוא הקוטר AC.

במקרה זה הצלע AD מתלכדת עם הרדיוס AO,

והצלע DC מתלכדת עם הרדיוס OC, ואז:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{R}{R} = 1$$

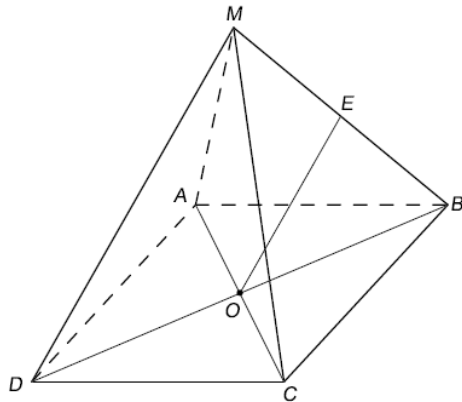
אם נתעלם מההתלכדות של AD ו-DC עם AO ו-CO בהתאמה,

ונתבונן רק על ההתלכדות של AO ו-CO עם הקוטר AC, אזי:

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow 2\beta = 180^\circ - 2\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin (180^\circ - 2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = 1 \quad (\checkmark)$$

שאלה 3



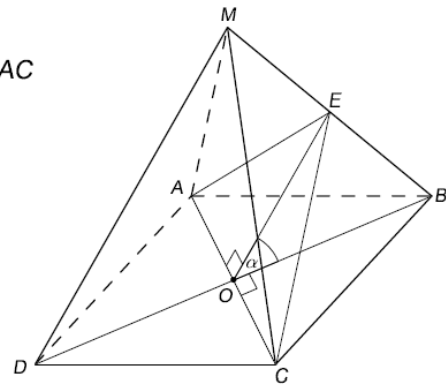
בפירמידה ישרה MABCD, שבסיסה ריבוע, אלכסוני הבסיס נפגשים בנקודה O. E היא נקודה על המקצוע MB, כך ש- OE הוא קטע אמצעים במשולש MBD. נתון כי הזווית בין המישור AEC לבסיס הפירמידה היא α . בטא באמצעות α את $\text{tg } \angle ACE$.

פתרון

$$(1) \triangle EBC \cong \triangle EBA \Rightarrow (2) EA = EC \Rightarrow (3,4) EO \perp AC$$

$$(4) BO \perp AC \Rightarrow (5) \angle EOB = \alpha$$

$$(7) EO = \frac{1}{2} MD = (8) \frac{1}{2} MB = EB \Rightarrow EO = EB$$

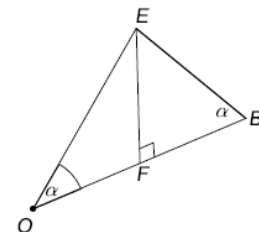


נקבע את אורך אלכסון הבסיס ל-2 (יחידות אורך)

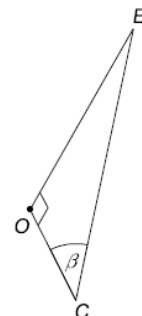
$$BD = 2 \Rightarrow (4) BO = OC = 1$$

$$\triangle EOB: (9) EF \perp BO \Rightarrow (10) OF = FB = \frac{1}{2}$$

$$\triangle EFO: \cos \alpha = \frac{OF}{OE} = \frac{0.5}{OE} \Rightarrow OE = \frac{0.5}{\cos \alpha}$$



$$\triangle EOC: \text{tg } \beta = \frac{EO}{OC} = \frac{\frac{0.5}{\cos \alpha}}{1} \Rightarrow \text{tg } \beta = \frac{1}{2 \cos \alpha}$$



(1) משפט חפיפה צלע-זווית-צלע: הבסיס ריבוע וכל הפאות הצדדיות חופפות זו לזו

(2) צלעות מתאימות במשולשים חופפים

(3) תיכון לבסיס במשולש שווה-שוקים - הוא גם גובה

(4) אלכסוני ריבוע מאונכים זה לזה וחוצים זה את זה

(5) הגדרת זווית בין שני מישורים

(7) קטע אמצעים שווה למחצית הצלע השלישית

(6) מקצועות שווים (הגדרת פירמידה ישרה)

(9) בנית עזר

(10) גובה לבסיס במשולש שווה-שוקים - הוא גם תיכון