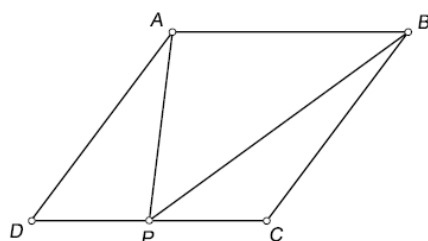


שלוש שאלות בנוס בטריגונומטריה

שאלה 1



המרובע ABCD הוא מעוין. P אמצע CD.

נסמן: $DP = m$, $\angle ADP = \beta$.

א. הבע את AP ואת BP באמצעות m ו- β .

ב. נסמן: $\angle APB = \alpha$. נתון: $\beta = 60^\circ$.

הוכח: $\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$

ג. נתון: $\beta = 60^\circ$. הבע באמצעות m את רדיוס המעגל החוסם את המשולש APB.

פתרון

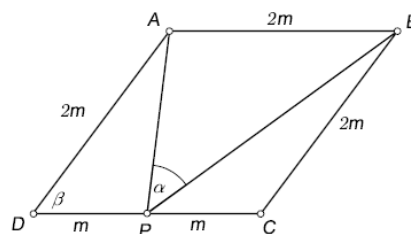
א.

$$DP = m, PC = DP \Rightarrow PC = m, AD = DC = 2m$$

$$\triangle ADP: AP^2 = 4m^2 + m^2 - 2 \cdot 2m \cdot m \cdot \cos \beta$$

$$AP = \sqrt{5m^2 - 4m^2 \cos \beta}$$

$$AP = m \sqrt{5 - 4 \cos \beta} \quad (\text{יחידות אורך})$$



$$\triangle BCP: \angle C = 180^\circ - \beta$$

$$BP^2 = 4m^2 + m^2 - 2 \cdot 2m \cdot m \cdot \cos (180^\circ - \beta) \stackrel{(1)}{=} 5m^2 + 4m^2 \cos \beta$$

$$BP = m \sqrt{5 + 4 \cos \beta} \quad (\text{יחידות אורך})$$

ב.

$$\beta = 60^\circ \Rightarrow AP = m \sqrt{5 - 4 \cdot \frac{1}{2}} = m \sqrt{3}, \quad BP = m \sqrt{5 + 4 \cdot \frac{1}{2}} = m \sqrt{7}$$

$$\triangle APB: AB^2 = AP^2 + BP^2 - 2 \cdot AP \cdot BP \cdot \cos \alpha$$

$$4m^2 = 3m^2 + 7m^2 - 2 \cdot m\sqrt{3} \cdot m\sqrt{7} \cdot \cos \alpha \quad / : m^2$$

$$4 = 3 + 7 - 2 \cdot \sqrt{21} \cos \alpha \Rightarrow 4 = 10 - 2 \cdot \sqrt{21} \cos \alpha$$

$$2 \cdot \sqrt{21} \cos \alpha = 6 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{21}}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{21}} \cdot \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{21} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7} \quad (\checkmark)$$

ג.

$$\triangle APB: \frac{AB}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow \frac{2m}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow R = \frac{m}{\sin \alpha}$$

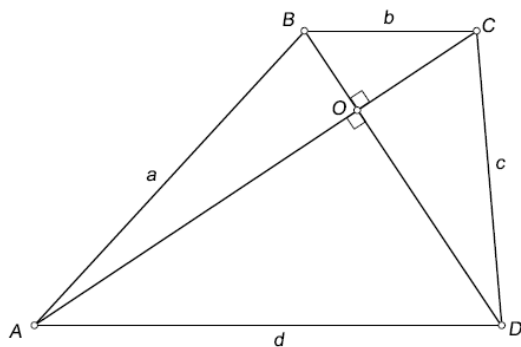
$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{21}{49}} = \sqrt{\frac{28}{49}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 7}}{7} = \frac{2\sqrt{7}}{7} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$R = \frac{m}{\sin \alpha} = \frac{m}{\frac{2}{\sqrt{7}}} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{7} m}{2} \quad (\text{יחידות אורך})$$

$$(1) \cos (180^\circ - \beta) = -\cos \beta$$

$$(2) 0^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \sin \alpha > 0 \quad \text{הסבר: מדוע ההתייחסות היא דוקא לשורש החיובי}$$

שאלה 2



בטרפז ABCD ($AD \parallel BC$) נתון:

$$AB = a, BC = b, CD = c$$

$$AD = d, d > b, AC \perp BD$$

אלכסוני הטרפז נפגשים בנקודה O.

$$\text{א. הוכח: } a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

ב. דרך הקדקוד B

מעבירים ישר המקביל לשוק CD. הישר חותך את הבסיס AD בנקודה M.

$$\text{נתון: } \angle ABM = \alpha. \text{ הוכח: } \cos \alpha = \frac{bd}{ac}$$

ג. הבע באמצעות d, b ו- α את:

(1) שטח המשולש ABM.

(2) שטח הטרפז ABCD.

פתרון

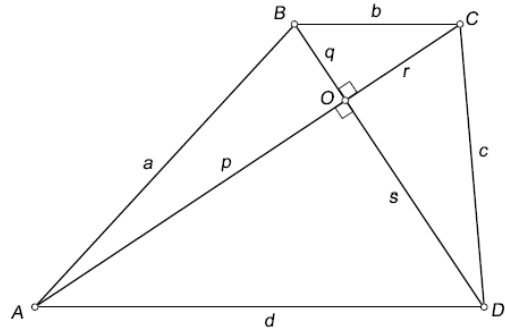
א.

סימון: $OA = p$, $OB = q$, $OC = r$, $OD = s$

$$a^2 + c^2 = (p^2 + q^2) + (r^2 + s^2) \quad \text{פיתגורס}$$

$$b^2 + d^2 = (q^2 + r^2) + (s^2 + p^2)$$

$$\Rightarrow a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \quad (\checkmark)$$



ב.

מקבילית BCDM $\Rightarrow MD = b$, $BM = c$

$\triangle ABM$: $AM = d - b$

$$(d - b)^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \alpha$$

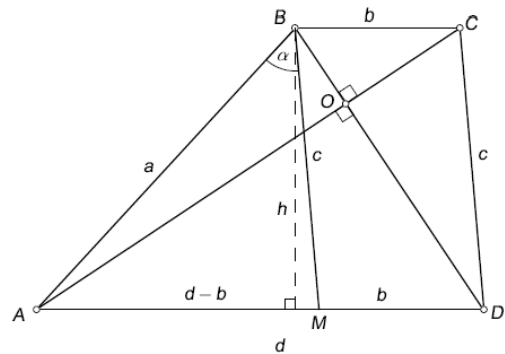
משפט הקוסינוסים

$$d^2 - 2db + b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \alpha$$

$$a^2 + c^2 - 2db = a^2 + c^2 - 2ac \cos \alpha$$

לפי סעיף א

$$-2db = -2ac \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{bd}{ac} \quad (\checkmark)$$



ג.

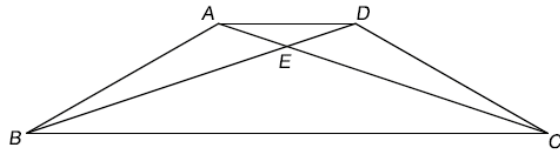
$$S_{\triangle ABM} = \frac{a \cdot c \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{\frac{bd}{\cos \alpha} \sin \alpha}{2} \Rightarrow S_{\triangle} = \frac{bd \operatorname{tg} \alpha}{2} \quad (\text{יחידות ריבועיות})$$

$$\cos \alpha = \frac{bd}{ac} \Rightarrow ac = \frac{bd}{\cos \alpha}$$

$$S_{\triangle} = \frac{bd \operatorname{tg} \alpha}{2} = \frac{AM \cdot h}{2} = \frac{(d - b) h}{2} \Rightarrow h = \frac{bd \operatorname{tg} \alpha}{d - b}$$

$$S_{ABCD} = \frac{(b + d) \cdot h}{2} = \frac{1}{2} (b + d) \cdot \frac{bd \operatorname{tg} \alpha}{d - b} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{bd(b + d) \operatorname{tg} \alpha}{2(d - b)} \quad (\text{יחידות ריבועיות})$$

שאלה 3



בציור טרפז שווה-שוקיים $ABCD$ ($AD \parallel BC$).

נתון: $\angle CAD = \alpha$, $\angle BDC = \beta$.

א. הוכח:

היחס בין שטח משולש AED

$$\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle BEC}} = \frac{\sin^2(2\alpha + \beta)}{\sin^2 \beta} \text{ הוא שטח משולש } BEC$$

ב. הוכח:

היחס בין שטח משולש BCD

$$\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ABE}} = \frac{2 \cos \alpha \sin(\alpha + \beta)}{\sin(2\alpha + \beta)} \text{ הוא שטח משולש } ABE$$

ג. נתון גם: $\alpha = 30^\circ$, $\sqrt{\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle BEC}}} = \frac{1}{4}$. מצא את β .

פתרון

א.

$$(1, 2, 3, 4) \quad \angle EAD = \angle EDA = \angle EBC = \angle ECB = \alpha$$

$$(5) \quad \angle ECD = 180^\circ - (2\alpha + \beta)$$

$$\triangle DEC: (6) \quad \frac{ED}{\sin(180^\circ - (2\alpha + \beta))} = \frac{EC}{\sin \beta}$$

$$(7) \quad \frac{ED}{EC} = \frac{\sin(2\alpha + \beta)}{\sin \beta}$$

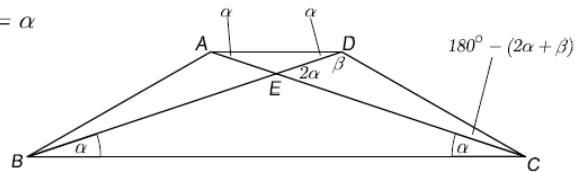
$$(8) \quad \triangle AED \sim \triangle BEC \Rightarrow (9) \quad \frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle BEC}} = \left(\frac{ED}{EC}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle BEC}} = \frac{\sin^2(2\alpha + \beta)}{\sin^2 \beta} \quad (\checkmark)$$

ב.

$$(5) \quad \angle BCD = 180^\circ - (\alpha + \beta), \quad \angle ABD = 180^\circ - (2\alpha + \beta)$$

$$(10, 7) \quad \frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ABE}} = \frac{BC \cdot CD \cdot \sin(\alpha + \beta)}{AB \cdot BE \cdot \sin(2\alpha + \beta)} = (11) \quad \frac{BC}{BE} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(2\alpha + \beta)}$$

$$\triangle BEC: \quad \angle E = 180^\circ - 2\alpha, \quad (6, 7) \quad \frac{BC}{\sin 2\alpha} = \frac{BE}{\sin \alpha}$$



$$\Rightarrow \frac{BC}{BE} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} \stackrel{(12)}{=} \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \cos \alpha$$

$$\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ABE}} = \frac{BC}{BE} \cdot \frac{\sin (\alpha+\beta)}{\sin (2\alpha+\beta)} \Rightarrow \frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ABE}} = \frac{2 \cos \alpha \sin (\alpha+\beta)}{\sin (2\alpha+\beta)} \quad (\checkmark)$$

ג.

$$(13) \quad \sqrt{\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle BEC}}} = \frac{\sin (2\alpha+\beta)}{\sin \beta} \stackrel{(1)}{=} \frac{\sin (60^\circ+\beta)}{\sin \beta} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{4}$$

$$4 \sin (60^\circ + \beta) = \sin \beta \Rightarrow \stackrel{(12)}{=} 4(\sin 60^\circ \cos \beta + \cos 60^\circ \sin \beta) = \sin \beta$$

$$4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \beta + \frac{1}{2} \sin \beta\right) = \sin \beta \Rightarrow 2\sqrt{3} \cos \beta + 2 \sin \beta = \sin \beta$$

$$2\sqrt{3} \cos \beta = -\sin \beta \quad / : (-\cos \beta) \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = -2\sqrt{3} \Rightarrow \beta = 106.1^\circ$$

(1) נתון (2) זוויות מתחלפות שוות בישרים מקבילים הנחתכים ע"י ישר שלישי

(3) בטרפז שווה שוקיים מתקיים: $EA = ED$, $EB = EC$ (4) זוויות הבסיס במשולש שווה-

שוקיים, שוות זו לזו (5) השלמה ל- 180° במשולש (6) משפט הסינוסים

(7) $\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ (8) משפט דמיון זווית-זווית

(9) יחס שטחי משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון (10) $S_{\triangle} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$

(11) $AB = CD$ (12) נוסחה (13) מסעיף א