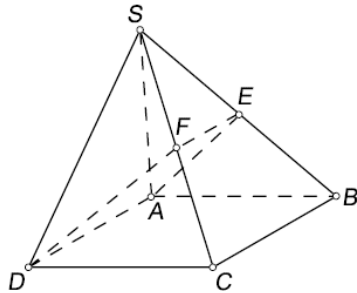


ארבע שאלות בטריגונומטריה

שאלה 1



SABCD היא פירמידה מרובעת שכל מקצועותיה שווים זה לזה.

E ו- F הן אמצעי המקצועות SB ו- SC בהתאמה.

חשב את הזווית בין מישור הבסיס ABCD למישור AEFD.

פתרון

נקבע את אורך המקצוע ל- 2 יחידות אורך, $DP = PA = CQ = QB = 1$.

הזווית המבוקשת היא α בציור.

$$(1) SE = EB, SF = FC \Rightarrow (2) EF \parallel BC \Rightarrow (3) SN = NQ$$

$$\triangle SQB: (4) SQ = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} = SP$$

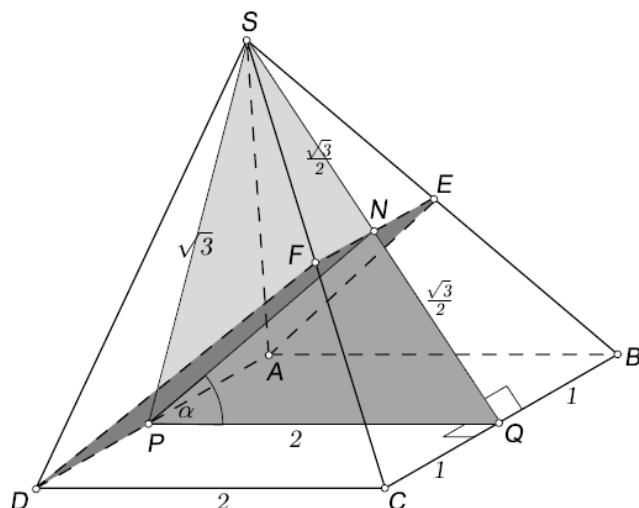
$$\triangle SPQ: (5) PQ = 2, (6) 2^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos \angle S$$

$$\Rightarrow \cos \angle S = \frac{1}{3} \Rightarrow \angle S = 70.5288^\circ$$

$$(7) \angle Q = \frac{180^\circ - 70.5288^\circ}{2} = 54.7356^\circ$$

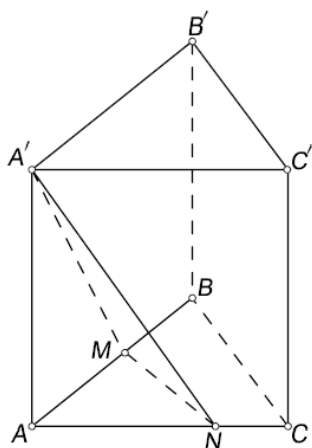
$$\triangle SNP: (6) PN^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 70.5288^\circ = 2.75 \Rightarrow PN = 1.6583$$

$$\triangle PNQ: (8) \frac{1.6583}{\sin 54.7356^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 54.7356^\circ}{2 \cdot 1.6583} = 0.4264 \Rightarrow \alpha = 25.24^\circ$$



- (1) נתון (2) קטע אמצעים במשולש SBC ולכן מקביל לצלע השלישית
 (3) משפט תאלס (4) משפט פיתגורס (5) צלעות נגדיות שוות במלבן $PQCD$
 (6) משפט הקוסינוסים (7) זוויות בסיס במשולש שווה-שוקים (SBC) שוות זו לזו
 (8) משפט הסינוסים

שאלה 2



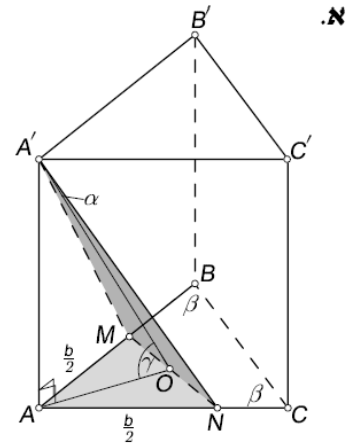
- נתונה מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הם משולשים שוויושוקיים ($AB = AC, A'B' = A'C'$).
 נקודות N ו- M הן אמצעי השוקיים AC ו- AB בהתאמה.
 נתון: $\angle MA'N = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $AB = AC = b$
א. הבע באמצעות b , α ו- β את גובה המנסרה.
ב. חשב את הזווית שבין המישור $A'MN$ למישור הבסיס ABC , כאשר $\alpha = 90^\circ$ ו- $\beta = 30^\circ$.

פתרון

$$\triangle AMN: \frac{OM}{\frac{b}{2}} = \cos \beta \Rightarrow OM = \frac{b \cos \beta}{2}$$

$$\triangle A'MN: \frac{b \cos \beta}{2 AM} = \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow A'M = \frac{b \cos \beta}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\begin{aligned} \triangle A'AM: h &= \sqrt{A'M^2 - AM^2} = \sqrt{\frac{b^2 \cos^2 \beta}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{b^2}{4}} \\ &= \frac{b}{2} \sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} - 1} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{\cos^2 \beta - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \\ &\Rightarrow h = \frac{b}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

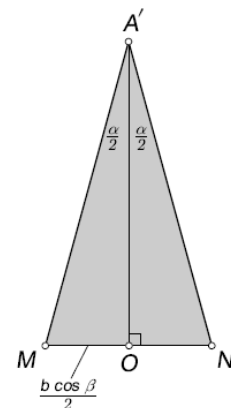
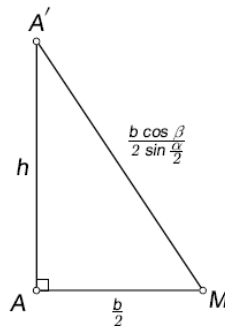
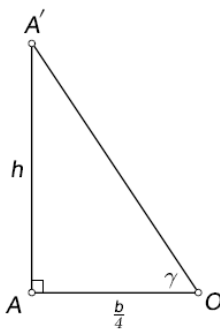
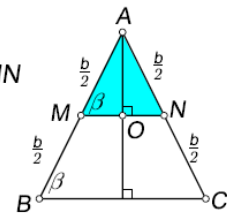


$$\triangle AOM: \frac{AO}{\frac{b}{2}} = \sin \beta \Rightarrow AO = \frac{b \sin \beta}{2} = \frac{b \sin 30^\circ}{2} = \frac{b \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{b}{4}$$

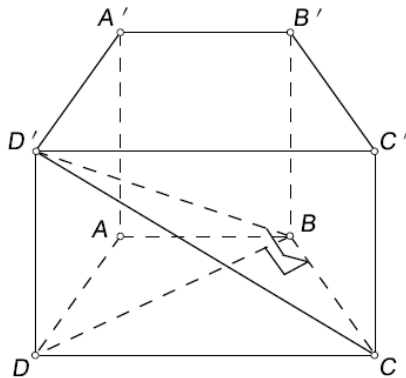
$$\begin{aligned} \triangle A'AO: h &= \frac{b}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{b}{2 \sin 45^\circ} \cdot \sqrt{\cos^2 30^\circ - \sin^2 45^\circ} \\ &= \frac{b}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow h = \frac{b}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\tan \gamma = \frac{h}{AO} = \frac{\frac{b}{2\sqrt{2}}}{\frac{b}{4}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \gamma = 54.74^\circ$$

קטע אמצעים ולכן מקביל לצלע השלישית



שאלה 3



הבסיס של מנסרה ישרה $ABCD A' B' C' D'$
 הוא טרפז שווה-שוקים $ABCD$ ($AB \parallel CD$).
 הזווית בין האלכסון $D'B$ ובין האלכסון $D'C$ היא α .
 אורך השוק של הטרפז $ABCD$ הוא a .
 $\angle DBC = 90^\circ$, $\angle D'BC = 90^\circ$, $\angle DCB = 60^\circ$.
א. הבע באמצעות a ו- α את גובה המנסרה.

ב. הבע באמצעות α את טנגנס הזווית שבין המישור $D'BC$ למישור הבסיס $ABCD$.

פתרון

א.

$$\triangle DBC: \frac{DB}{a} = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow DB = a\sqrt{3}$$

$$\triangle D'BC: \frac{a}{D'B} = \tan \alpha \Rightarrow D'B = \frac{a}{\tan \alpha}$$

$$\triangle D'DB: DD' = \sqrt{D'B^2 - DB^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\tan^2 \alpha} - 3a^2}$$

$$DD' = h \Rightarrow h = \frac{a}{\tan \alpha} \sqrt{1 - 3 \tan^2 \alpha} \quad (\text{יחידות אורך})$$

ההצגה הבאה שקולה להצגה המוצעת:

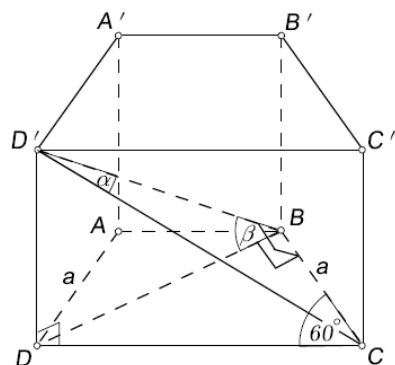
$$h = \frac{a \sqrt{1 - 4 \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} \quad (\text{יחידות אורך})$$

(ניתן להוכיח על ידי הצבת: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ופישוט הביטוי המתקבל.)

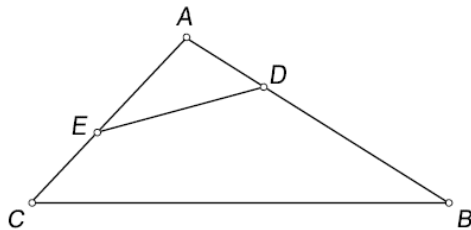
ב.

$$\triangle D'DB: \tan \beta = \frac{DD'}{BD} = \frac{\frac{a}{\tan \alpha} \sqrt{1 - 3 \tan^2 \alpha}}{a\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \beta = \frac{\sqrt{1 - 3 \tan^2 \alpha}}{\sqrt{3} \tan \alpha}$$

גם להצגה זו יש הצגה שקולה כנ"ל: $\tan \beta = \frac{\sqrt{1 - 4 \sin^2 \alpha}}{\sqrt{3} \sin \alpha}$



שאלה 4



במשולש ABC הנקודות D ו- E מונחות על הצלעות AB ו- AC בהתאמה.

$$\text{נתון: } \angle ADE = \angle C = \gamma$$

$$\angle AED = \angle B = \beta$$

$$BC = 5\text{cm}$$

$$S_{BCED} = 4\text{cm}^2$$

$$\text{הראה כי } DE = \sqrt{25 - 8\left(\frac{1}{\tan \beta} + \frac{1}{\tan \gamma}\right)}$$

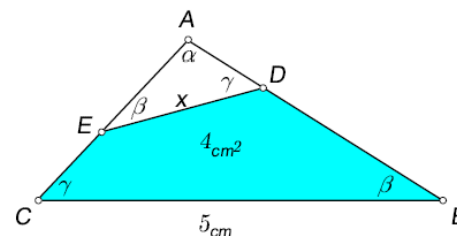
פתרון

$$\text{נסמן: } \angle A = \alpha, \quad DE = x$$

$$\triangle ABC: \quad (1) \quad \frac{AB}{\sin \gamma} = \frac{5}{\sin \alpha} \Rightarrow AB = \frac{5 \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$\frac{AC}{\sin \beta} = \frac{5}{\sin \alpha} \Rightarrow AC = \frac{5 \sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5 \sin \gamma}{\sin \alpha} \cdot \frac{5 \sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \sin \alpha \\ &= \frac{25 \sin \gamma \sin \beta}{2 \sin \alpha} \end{aligned}$$



$$(3) \quad S_{\triangle AED} = S_{\triangle ABC} - 4 = \frac{25 \sin \gamma \sin \beta}{2 \sin \alpha} - 4$$

$$(4) \quad \triangle AED \sim \triangle ABC \Rightarrow (5) \quad \frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{x}{5}\right)^2$$

$$\frac{x^2}{25} = \frac{\frac{25 \sin \gamma \sin \beta}{2 \sin \alpha} - 4}{\frac{25 \sin \gamma \sin \beta}{2 \sin \alpha}} = \frac{25 \sin \gamma \sin \beta - 8 \sin \alpha}{25 \sin \gamma \sin \beta} = 1 - \frac{8}{25} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma \sin \beta} \quad / \cdot 25$$

$$x^2 = 25 - 8 \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma \sin \beta} \stackrel{(6)}{=} 25 - 8 \cdot \frac{\sin (180^\circ - (\gamma + \beta))}{\sin \gamma \sin \beta}$$

$$\begin{aligned}
 &=^{(7)} 25 - \frac{8 \sin(\gamma + \beta)}{\sin \gamma \sin \beta} =^{(8)} 25 - \frac{8 (\sin \gamma \cos \beta + \cos \gamma \sin \beta)}{\sin \gamma \sin \beta} \\
 &= 25 - 8 \left(\frac{\sin \gamma \cos \beta}{\sin \gamma \sin \beta} + \frac{\cos \gamma \sin \beta}{\sin \gamma \sin \beta} \right) = 25 - 8 \left(\frac{\cos \beta}{\sin \beta} + \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \right) \\
 &x^2 =^{(9)} 25 - 8 \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} \right) \Rightarrow \Rightarrow x = \sqrt{25 - 8 \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} \right)} \quad (\checkmark)
 \end{aligned}$$

אפשר גם ללא שימוש בדמיון לפי שטח משולש לפי צלע אחת:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{5^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}, \quad S_{\triangle ADE} = \frac{x^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$$

הצבה במשוואה: $S_{\triangle ADE} + 4 = S_{\triangle ABC}$ וחילוץ x .

- (1) משפט הסינוסים (2) נוסחת שטח משולש (3) נתון (4) משפט דמיון ז-ז
- (5) היחס בין שטחי משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון
- (6) השלמה ל- 180° במשולש (7) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- (8) נוסחת סינוס של סכום שתי זוויות (9) $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$