

עוד שתי שאלות בטריגונומטריה

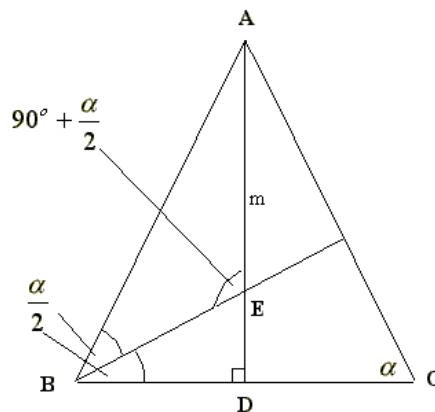
שאלה 1

במשולש שווה שוקיים ABC (בו $AB = AC$), E היא נקודת המפגש של חוצי הזוויות

במשולש. המשך AE חותך את הבסיס בנקודה D . נתון כי $\angle ABC = \alpha$, $AE = m$.

א. הביעו את אורך הקטע ED באמצעות α ו- m .

ב. הביעו את רדיוס המעגל החוסם את משולש ABC באמצעות α ו- m .



פתרון

א. BE חוצה את $\angle ABC$ השווה ל- α , ולכן

$$\angle ABE = \angle EBC = \frac{\alpha}{2}$$

כמו כן, AD חוצה את זווית הראש במשולש שווה השוקיים, ולכן הוא גם גובה

לבסיס המשולש ומאונך לו. לכן $\angle EDB = 90^\circ$, ומכאן $\angle BED = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, ולכן

$$\angle AEB = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

נשתמש במשפט הסינוסים ב- $\triangle ABE$:

$$\frac{m}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{AB}{\sin(90^\circ + \frac{\alpha}{2})}$$
$$AB = \frac{m \cdot \sin(90^\circ + \frac{\alpha}{2})}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{m \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = m \cdot \cot \frac{\alpha}{2}$$

כמו כן, כיוון ש- $\triangle ABD$ ישר זווית:

$$\sin \angle ABD = \frac{AD}{BA}$$

$$\sin \alpha = \frac{AD}{m \cot \frac{\alpha}{2}}$$

$$AD = m \sin \alpha \cot \frac{\alpha}{2}$$

וכיוון ש- $ED = AD - m$ נקבל כי

$$ED = m \cdot \sin \alpha \cot \frac{\alpha}{2} - m = m(\sin \alpha \cot \frac{\alpha}{2} - 1)$$

ב. נשתמש במשפט הסינוסים ב- $\triangle ABC$:

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2R$$

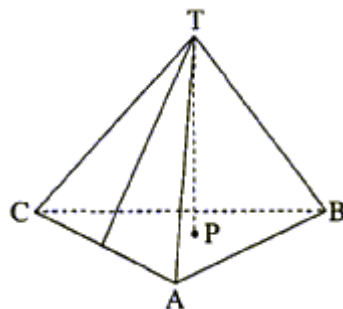
$$\frac{m \cot \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} = 2R$$

$$R = \frac{m \cot \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \alpha}$$

שאלה 2

נתונה פירמידה ישרה $ABCT$, שבסיסה ABC היא משולש שווה-צלעות. TP הוא גובה

הפירמידה. אורך צלע הבסיס הוא 8 ס"מ. אורך מקצוע צדדי הוא 7 ס"מ.

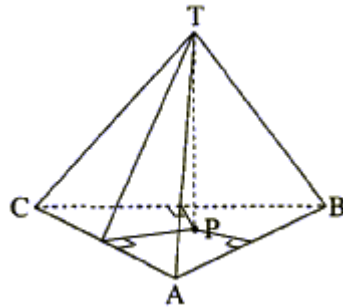


א. חשבו את הזווית שבין מקצוע צדדי לבסיס.

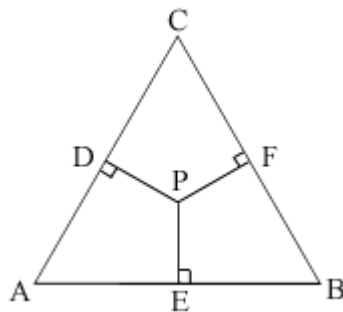
ב. חשב את הזווית שבין פאה צדדית לבסיס.

פתרון

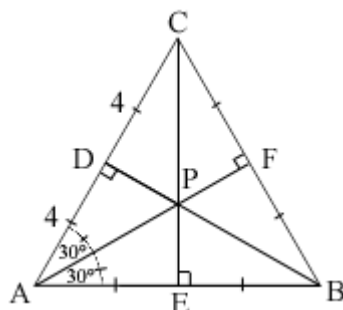
א. נוסיף את היטלי האנכים של פאות הצד על הבסיס ככה שהנקודה P היא מפגש ההיטלים:



נתבונן כעת בבסיס הפירמידה: נמשיך את האנכים DP, EP, FP כך שיפגשו עם הקדקודים A, C, B בהתאמה.



ומכיוון שהמשולש ABC שווה צלעות, האנכים הם גם חוצי זווית וגם גבהים.



נחשב את AP, DP:

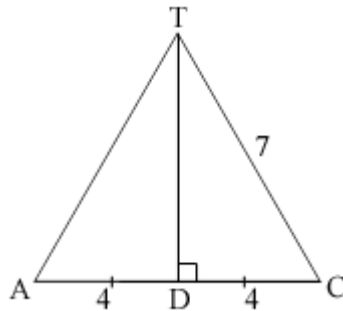
$$AP \cos 30 = 4$$

$$AP = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 30 = \frac{DP}{AD} = \frac{DP}{4}$$

$$DP = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

נתבונן כעת באחת מפאות הצד ונחשב את האנך בה:



$$TC^2 = DT^2 + DC^2$$

$$49 = DT^2 + 16$$

$$DT^2 = 33$$

$$DT = \sqrt{33}$$

כעת נחשב את הזווית שבין מקצוע צדדי לבסיס:

$$\cos(\angle TAP) = \frac{AP}{AT} = \frac{\frac{8}{\sqrt{3}}}{7} \approx 0.66$$

$$\angle TAP \approx 48.71^\circ$$

ב. הזווית שבין פיאה צדדית לבסיס:

$$\cos(\angle TDP) = \frac{DP}{DT} = \frac{\frac{4}{\sqrt{3}}}{\sqrt{33}} \approx 0.402$$

$$\angle TDP \approx 66.295^\circ$$