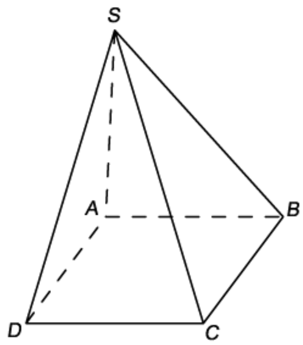
עוד שלוש שאלות בטריגונומטריה

שאלה 1



נתונה פירמידה ישרה $SABCD$, שבסיסה ריבוע.

הזווית בין שתי פאות סמוכות היא 2α,

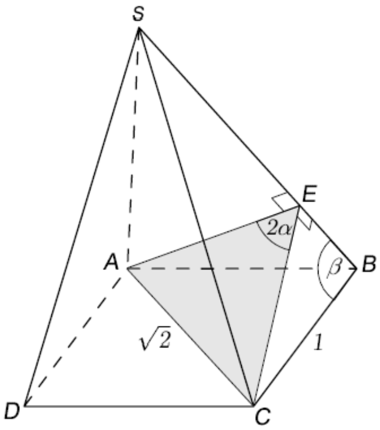
והזווית בין מקצוע צדדי <u>למקצוע הבסיס</u> היא β.

א. הוכח כי $\sin\alpha \sin\beta = \sin 45^{\circ}$

ב. הבע באמצעות α את היחס
בין מקצוע הבסיס ובין רדיוס המעגל החוסם פאה צדדית.
(אין צורך לפשט את הביטוי.)

פתרון

א. נקבע את אורך צלע הבסיס $AB = BC = CD = DA = 1$ (יחידת אורך אחת)



$\underline{\triangle CEB:}$ $\sin\beta = \frac{CE}{BC} = \frac{CE}{1} \quad \Rightarrow \quad CE = \sin\beta \ \ (= AE)$

השלם: הוכח: $\triangle AEB \cong \triangle CEB$ (הראה ש־ E מתלכדת)

$\underline{\triangle EAC:}$ $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ פיתגורס

$\angle EAC = \angle ECA = \frac{180^{\circ} - 2\alpha}{2} = 90^{\circ} - \alpha$

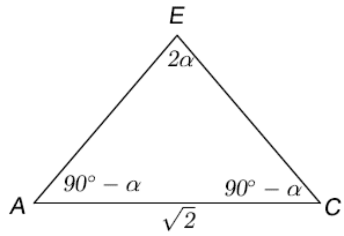
$\frac{AC}{\sin 2\alpha} = \frac{AE}{\sin(90^{\circ} - \alpha)}$ משפט הסינוסים

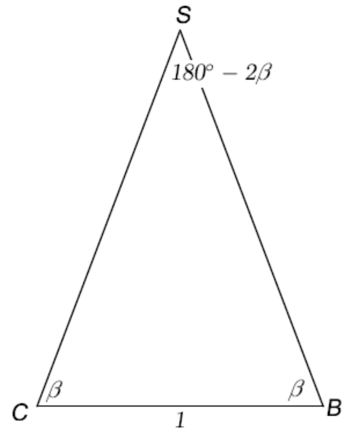
$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin(90^{\circ} - \alpha)}$

$\Rightarrow \quad \sqrt{2} = \frac{\sin\beta \sin 2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\beta \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}$

$$\Rightarrow \quad \sin\alpha \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^{\circ} \quad (\checkmark)$$

ב.





$\underline{\triangle SFC:}$ $\angle S = 180^{\circ} - 2\beta$

$$\frac{BC}{\sin(180^\circ - 2\beta)} = 2R$$

$$R = \frac{1}{2\sin 2\beta}$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2\sin\alpha}$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{1}{2\sin^2\alpha}}$$

$$\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta = \cancel{2}\,\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}\sin\alpha}\sqrt{1-\frac{1}{2\sin^2\alpha}}$$

$$R = \frac{1}{2\sin 2\beta} \quad \Rightarrow \quad \frac{BC}{R} = \frac{1}{\frac{1}{2\sin 2\beta}} = 2\sin 2\beta$$

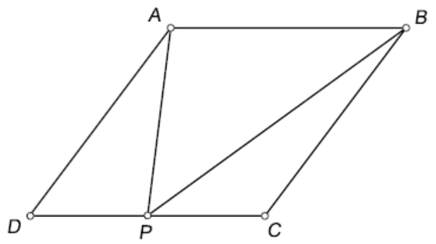
$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{BC}{R} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin\alpha}\sqrt{1-\frac{1}{2\sin^2\alpha}}}$$

$$\frac{BC}{R} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin\alpha}\sqrt{1-\frac{1}{2\sin^2\alpha}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2\sin^2\alpha - 1}{2\sin^2\alpha}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{-\cos 2\alpha}{2\sin^2\alpha}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sqrt{-\cos 2\alpha}}{\sqrt{2}\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{BC}{R} = \frac{2\sqrt{-\cos 2\alpha}}{\sin^2\alpha}}$$

שאלה 2



המרובע $ABCD$ הוא מעוין. P אמצע CD.

נסמן: $DP = m$, $\angle ADP = \beta$.

א. הבע את AP ואת BP באמצעות m ו־ β.

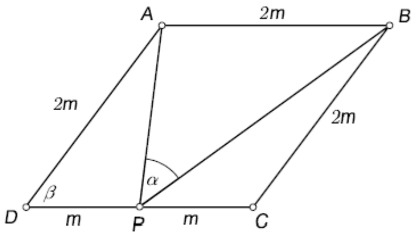
ב. נסמן: $\angle APB = \alpha$. נתון: $\beta = 60^{\circ}$.

הוכח: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$

ג. נתון: $\beta = 60^{\circ}$. הבע באמצעות m את רדיוס המעגל החוסם את המשולש APB.

פתרון

א.



$DP = m \ , \ PC = DP \quad \Rightarrow \quad PC = m \ \ , \ \ AD = DC = 2m$

$\underline{\triangle ADP:} \ \ AP^2 = 4m^2 + m^2 - 2 \cdot 2m \cdot m \cdot \cos\beta$

$AP = \sqrt{5m^2 - 4m^2 \cos\beta}$

$\mathbf{AP = m\sqrt{5 - 4\cos\beta}}$ **(יחידות אורך)**

$\underline{\triangle BCP:} \ \ \angle C = 180^\circ - \beta$

$BP^2 = 4m^2 + m^2 - 2 \cdot 2m \cdot m \cdot \cos(180^\circ - \beta) \overset{(1)}{=} 5m^2 + 4m^2 \cos\beta$

$\mathbf{BP = m\sqrt{5 + 4\cos\beta}}$ **(יחידות אורך)**

ב.

$\beta = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad AP = m\sqrt{5 - 4 \cdot \frac{1}{2}} = m\sqrt{3} \ \ , \ \ BP = m\sqrt{5 + 4 \cdot \frac{1}{2}} = m\sqrt{7}$

$\underline{\triangle APB:} \ \ AB^2 = AP^2 + BP^2 - 2 \cdot AP \cdot BP \cdot \cos\alpha$

$4m^2 = 3m^2 + 7m^2 - 2 \cdot m\sqrt{3} \cdot m\sqrt{7} \cdot \cos\alpha \quad / : m^2$

$4 = 3 + 7 - 2 \cdot \sqrt{21}\sqrt{}\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad 4 = 10 - 2 \cdot \sqrt{21}\cos\alpha$

$2 \cdot \sqrt{21}\cos\alpha = 6 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{21}}$

$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{21}} \cdot \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{21} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}} \ \ (\checkmark)$

ג.

$\underline{\triangle APB:} \ \ \frac{AB}{\sin\alpha} = 2R \quad \Rightarrow \quad \frac{2m}{\sin\alpha} = 2R \quad \Rightarrow \quad R = \frac{m}{\sin\alpha}$

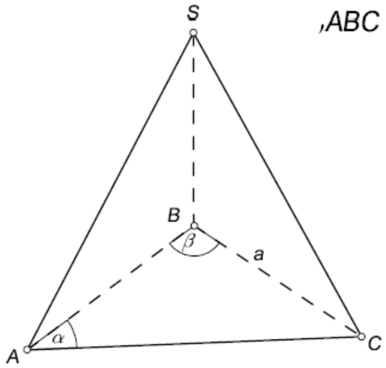
$\sin\alpha \overset{(2)}{=} \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{21}{49}} = \sqrt{\frac{28}{49}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 7}}{7} = \frac{2\sqrt{7}}{7} = \frac{2}{\sqrt{7}}$

$R = \frac{m}{\sin\alpha} = \frac{m}{\frac{2}{\sqrt{7}}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R = \frac{\sqrt{7}\,m}{2}}$ **(יחידות אורך)**

$(1) \ \ \cos(180^\circ - \beta) = -\cos\beta$

$(2) \ \ 0^\circ < \alpha < 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha > 0$ הסבר: מדוע ההתייחסות היא דוקא לשורש החיובי

שאלה 3



בפירמידה ישרה $SABC$ $(SA = SB = SC)$, שבסיסה משולש ABC,

נתון: $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $BC = a$

הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס היא δ.

א. הבע באמצעות נתוני השאלה את רדיוס המעגל החוסם את הבסיס.

ב. הבע באמצעות נתוני השאלה את נפח הפירמידה.

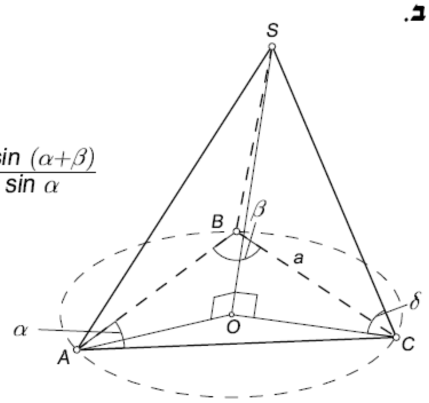
ג. נתון: $\alpha = \beta = \delta = 60^\circ$.

חשב את הזווית שבין הפאה SBC לבסיס.

פתרון

א. עקב גובה פירמידה ישרה שבסיסה משולש הוא מרכז המעגל החוסם את המשולש (את הבסיס).

ב.



$\underline{\triangle ABC:}$ (1) $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R = \frac{a}{2\sin\alpha}}$

$\underline{\triangle ABC:}$ (1) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin(180^\circ-(\alpha+\beta))} \quad \Rightarrow^{(2)} \quad AB = \frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$

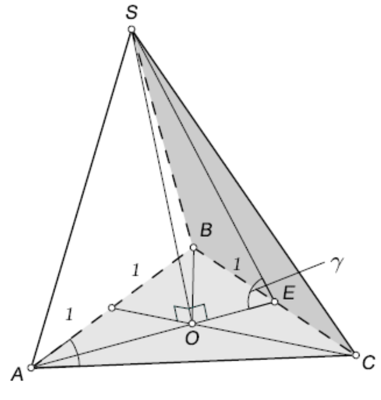
$S_\triangle = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin\beta}{2} = \frac{a\sin(\alpha+\beta)\cdot a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{2}$

$S_\triangle = \frac{a^2\sin(\alpha+\beta)\sin\beta}{2\sin\alpha}$

$\underline{\triangle SOC:}$ $\frac{SO}{R} = tg\,\delta \quad \Rightarrow \quad SO = R\,tg\,\delta = \frac{a\,tg\,\delta}{2\sin\alpha}$

$V = \frac{S_\triangle \cdot SO}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sin(\alpha+\beta)\sin\beta}{2\sin\alpha}\cdot\frac{a\,tg\,\delta}{2\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V = \frac{a^3\sin\beta\,\sin(\alpha+\beta)\,tg\,\delta}{12\sin^2\alpha}}$ **(ק"י)**

ג. במקרה זה משולש הבסיס הוא משולש שווה־צלעות. נקבע: $a = 2$ (י"א).



$\underline{\triangle ABE:}$ (3) $AE = \sqrt{4-1} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow^{(4)} \quad OE = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(5) $SO = \frac{a\,tg\,\delta}{2\sin\alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$

$\underline{\triangle SOE:}$ $tg\,\gamma = \frac{SO}{OE} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\gamma = 73.9^\circ}$