

עוד ארבע שאלות בטריגונומטריה

שאלה 1

קטע AC הוא קוטר במעגל.

נקודה D נמצאת על מעגל זה, ונקודה B נמצאת על הקוטר AC.

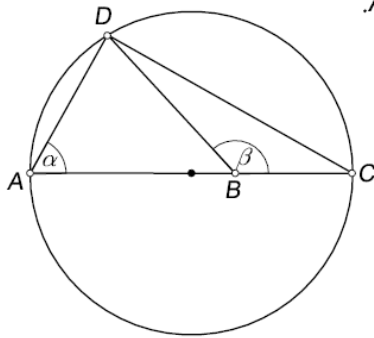
נסמן: $\angle DAB = \alpha$, $\angle DBC = \beta$.

א. הבע באמצעות α ו- β את היחס

בין שטח המשולש ADB ($S_{\triangle ADB}$)

לבין שטח המשולש ADC ($S_{\triangle ADC}$).

ב. מצא את β , אם $S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} S_{\triangle ADC}$ ו- $\alpha = 60^\circ$.



פתרון

א.

$$\triangle ADC: \frac{AD}{2R} = \cos \alpha \Rightarrow AD = 2R \cos \alpha$$

$$\frac{DC}{2R} = \sin \alpha \Rightarrow DC = 2R \sin \alpha$$

$$\angle DBA = 180^\circ - \beta \Rightarrow \angle ADB = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - \beta) = \beta - \alpha$$

$$\triangle ADB: \frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin (180^\circ - \beta)} = \frac{2R \cos \alpha}{\sin \beta}$$

$$BD = \frac{2R \cos \alpha \sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\frac{S_{\triangle ADB}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2} AD \cdot DB \cdot \sin (\beta - \alpha)}{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC} = \frac{DB \sin (\beta - \alpha)}{DC}$$

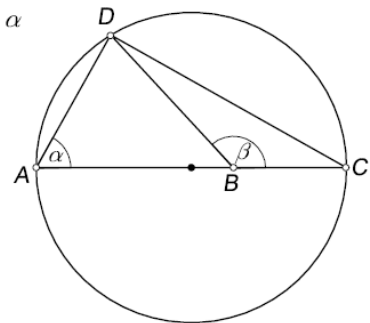
$$= \frac{\frac{2R \cos \alpha \sin \alpha \sin (\beta - \alpha)}{\sin \beta}}{2R \sin \alpha} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ADB}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\cos \alpha \sin (\beta - \alpha)}{\sin \beta}$$

ב.

$$\alpha = 60^\circ, \frac{\cos \alpha \sin (\beta - \alpha)}{\sin \beta} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \sin (\beta - 60^\circ)}{\sin \beta} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin (\beta - 60^\circ) = \sin \beta$$

$$(1) \beta - 60^\circ = \beta + 360^\circ k \Rightarrow -60^\circ = 360^\circ k \Rightarrow \emptyset$$

$$(2) \beta - 60^\circ = 180^\circ - \beta + 360^\circ k \Rightarrow 2\beta = 240^\circ \Rightarrow \beta = 120^\circ$$



שאלה 2

נתונה פירמידה ישרה $SABC$ שבסיסה ABC הוא משולש שווה-צלעות.

נתון כי זווית הראש בכל פאה צדדית היא 2α , והזווית בין שתי פאות צדדיות היא 2β .

א. הבע את $\sin \beta$ באמצעות $\cos \alpha$.

ב. חשב את β , אם נתון כי היקף הבסיס ABC שווה להיקף של פאה צדדית.

פתרון

נקבע את אורך שוק הפאה הצדדית ל-1 יחידת אורך.

בניות עזר: $(\triangle SBC) \quad SF \perp BC$

$(\triangle EBC) \quad EG \perp BC$

$$\triangle SEC: \sin 2\alpha = \frac{EC}{SC} = EC$$

$$\triangle SFC: \sin \alpha = \frac{FC}{SC} = FC$$

$$\triangle EGC: \sin \beta = \frac{GC}{EC} = \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$= \frac{\sin \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$\Rightarrow \sin \beta = \frac{1}{2 \cos \alpha}$$

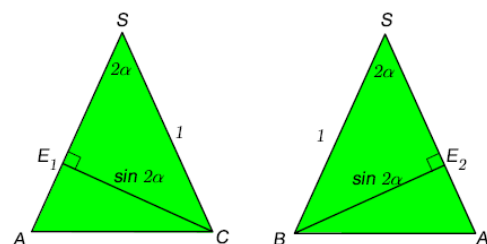
$$3 BC = 2 SA + BC$$

$$2 BC = 2 SA \Rightarrow BC = SA$$

$$\Rightarrow SB = BC = SC \Rightarrow 2\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$\sin \beta = \frac{1}{2 \cos \alpha} = \frac{1}{2 \cos 30^\circ} = \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \beta = 35.26^\circ$$

השלמת הסבר:



$$\triangle SAB: CE_1 \perp BA, \triangle SAC: CE_2 \perp SA$$

$$SB = SC = 1, \angle BSE_2 = \angle CSE_1 = 2\alpha \Rightarrow \angle SE_1C = \angle SE_2B$$

$$\Rightarrow \triangle SE_1C \cong \triangle SE_2B \text{ זווית-צלע-זווית}$$

$$\Rightarrow SE_1 = SE_2, E_1C = E_2B \text{ צמב"ח}$$

מכאן: (1) הגבהים CE_1 ו- BE_2 נפגשים בנקודה אחת (E)

(2) $\triangle BEC$ הוא שווה-שוקיים

שאלה 3

נתון מלבן $ABCD$. האלכסון AC יוצר זווית α עם הצלע AD .

P היא נקודה על האלכסון AC , כך ש- $\angle PDA = \beta$.

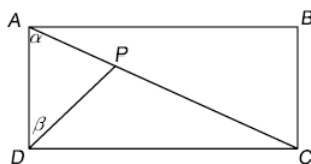
r הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש APD .

R הוא רדיוס המעגל החוסם את המלבן $ABCD$.

א. הבע באמצעות α ו- β את היחס $\frac{r}{R}$.

ב. הבע באמצעות α ו- β את יחס השטחים $\frac{S_{APD}}{S_{ABCD}}$.

ג. נתון כי $\frac{S_{APD}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4}$. הוכח: $\alpha = \beta$.



פתרון

א. נסמן: $AD = BC = x$

$$\triangle APD: (1) \angle P = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$(2) \frac{x}{\sin(180^\circ - (\alpha + \beta))} = 2r \Rightarrow (3) r = \frac{x}{2 \sin(\alpha + \beta)}$$

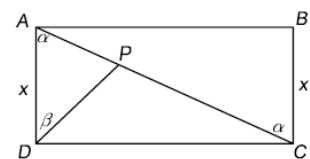
$$\triangle ABC: (4) 2R = AC, (5) \angle C = \alpha$$

$$\frac{x}{2R} = \cos \alpha \Rightarrow R = \frac{x}{2 \cos \alpha}$$

$$\frac{r}{R} = \frac{\frac{x}{2 \sin(\alpha + \beta)}}{\frac{x}{2 \cos \alpha}} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

ב.

$$\begin{aligned} \frac{S_{APD}}{S_{ABCD}} &= \frac{S_{APD}}{2 S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin(180^\circ - (\alpha + \beta))}{2 \cdot \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha \sin(90^\circ - \alpha) \sin 90^\circ} \\ &=^{(3,6)} \left(\frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \right)^2 \cdot \frac{\sin \beta \sin(\alpha + \beta)}{2 \cos \alpha \cdot 1} \Rightarrow \frac{S_{APD}}{S_{ABCD}} = \frac{\cos \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)} \end{aligned}$$



ג.

$$\frac{S_{APD}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{APD}}{2 S_{ADC}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{S_{APD}}{S_{ADC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow^{(7)} AP = PC \Rightarrow^{(8)} AP = DP \Rightarrow^{(9)} \alpha = \beta \quad (\checkmark)$$

(1) השלמה ל- 180° במשולש (2) משפט הסינוסים (3) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

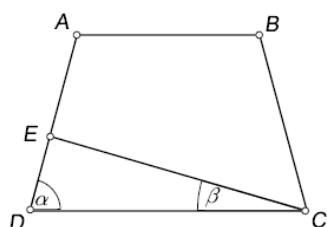
(4) קוטר המעגל החוסם משולש ישר-זווית הוא היתר שלו (5) זוויות מתחלפות

(6) $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ (7) לשני המשולשים APD ו- ACD גובה משותף לבסיסים AP ו- AC

(8) אלכסוני מלבן שווים זה לזה וחוצים זה את זה

(9) זוויות הבסיס במשולש שווה-שוקיים שוות זו לזו

שאלה 4



הזווית ליד הבסיס הגדול בטרפז שווה-שוקיים $ABCD$ היא α .

E היא נקודה על השוק AD כך ש- $\angle ECD = \beta$.

אורך השוק של הטרפז שווה לאורך הבסיס הקטן AB .

א. הבע באמצעות α ו- β את היחס בין שטח

המשולש DEC לשטח המשולש BDC $\left(\frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle BDC}} \right)$.

ב. נתון: $\angle AEC = 90^\circ$, אורך אלכסון הטרפז גדול פי 1.5 מאורך הבסיס הקטן AB .

חשב את היחס $\frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle BDC}}$.

פתרון

א. ללא הגבלת הכלליות, נקבע את שוק הטרפז ל-1 יחידת אורך. בניית עזר: $BF \parallel AD$.

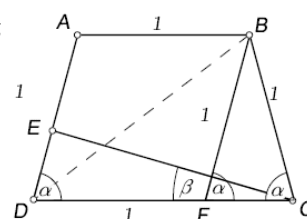
$$\Rightarrow AB = BC = BF = FD = DA = 1$$

$$\triangle BFC: \angle F = \alpha \Rightarrow \angle B = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \frac{FC}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow FC = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \cos \alpha$$

$$\triangle EDC: DC = 1 + FC = 1 + 2 \cos \alpha$$

$$\frac{ED}{\sin \beta} = \frac{DC}{\sin(180^\circ - (\alpha + \beta))} \Rightarrow ED = \frac{(1 + 2 \cos \alpha) \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$



$$\frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle BDC}} = \frac{\frac{1}{2}ED \cdot DC \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{2}BC \cdot DC \cdot \sin \alpha} = \frac{ED}{BC} = \frac{ED}{1} = ED \Rightarrow \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle BDC}} = \frac{(1+2 \cos \alpha) \sin \beta}{\sin (\alpha+\beta)}$$

.1

$$\underline{\triangle ABD}: 1.5^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos (180^\circ - \alpha) \Rightarrow \cos \alpha = 0.125, \quad \underline{\triangle EDC}: \beta = 90^\circ - \alpha$$

$$\begin{aligned} \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle BDC}} &= \frac{(1+2 \cos \alpha) \sin \beta}{\sin (\alpha+\beta)} = \frac{(1+2 \cos \alpha) \sin (90^\circ - \alpha)}{\sin (\alpha + (90^\circ - \alpha))} \\ &= \frac{(1+2 \cdot 0.125) \cdot \cos \alpha}{\sin 90^\circ} = \frac{1.25 \cdot 0.125}{1} \Rightarrow \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle BDC}} = 0.15625 = \frac{5}{32} \end{aligned}$$