

עוד שתי שאלות בפונקציות טריגונומטריות

שאלה 1

נתונה הפונקציה: $f(x) = a \sin^3 x - 3 b \sin x$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$. ישר, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \pi/6$, מקביל לציר ה-x.
א. הראו כי $a = 4b$.
ב. נתון: $b > 0$. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון (הביעו באמצעות b לפי הצורך), וקבעו את סוגן.

פתרון

א. המשיק לגרף הפונקציה מקביל לציר x בנקודה בה הנגזרת שלה שווה 0.
נגזרת הפונקציה היא:
$$f'(x) = 3a \sin^2 x \cos x - 3b \cos x = 3 \cos x (a \sin^2 x - b)$$

נתון ש:

$$\begin{aligned} f'(\pi/6) &= 0 \\ 3 \cos(\pi/6) (a \sin^2(\pi/6) - b) &= 0 \\ 3 \cos(\pi/6) &\neq 0 \\ a \sin^2(\pi/6) - b &= 0 \\ a/4 - b &= 0 \\ a &= 4b \\ \text{מ.ש.ל.} \end{aligned}$$

ב. דבר ראשון, נכתוב שוב איך נראות הפונקציה והנגזרת שלה:

$$\begin{aligned} f(x) &= b (4 \sin^3 x - 3 \sin x) \\ f'(x) &= 3b \cos x (4 \sin^2 x - 1) \end{aligned}$$

ונחפש נקודות המאפסות את הנגזרת:

$$3b \cos x (4 \sin^2 x - 1) = 0$$

$$1. \cos x = 0$$

$$x = \pi/2$$

(היחידה בתחום הנתון)

כאשר x עובר דרך נקודה זו, הנגזרת מְשָׁנָה את סימנה מ-"+" ל-"-",

משמע זוהי נקודת מקסימום. ערך הפונקציה בנקודה זו:

$$f(\pi/2) = b(4 - 3) = b$$

נקודת מקסימום: $(\pi/2, b)$.

$$2. \quad 4 \sin^2 x - 1 = 0$$

$$\sin x = 1/2$$

(בתחום הנתון הסינוס אינו שלילי)

$$2.1. \quad x = \pi/6$$

$$f(\pi/6) = b(4/8 - 3/2) = -b$$

בנקודה זו הנגזרת משנה את סימנה מ-"-" ל-"+", משמע: הנקודה $(\pi/6, -b)$

היא נקודת מינימום.

$$2.2. \quad x = 5\pi/6$$

$$f(5\pi/6) = f(\pi/6) = -b$$

(כי הביטוי תלוי רק בסינוס, ושני הסינוסים שווים)

גם בנקודה זו הנגזרת משנה את סימנה מ-"-" ל-"+" (הסינוס אמנם יורד,

אך הקוסינוס שלילי), משמע: גם הנקודה $(5\pi/6, -b)$ היא נקודת מינימום.

ואלו הן נקודות הקיצון היחידות בתחום הנתון.

הערה: ניתן לקבוע אם הנקודות החשודות כנקודות קיצון הן נקודות מינימום או

מקסימום גם על ידי בדיקת הסימן של ערך הנגזרת השנייה בנקודות אלה.

שאלה 2

נתונה הפונקציה $y = \frac{x^2}{4} - \sin x$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

- א. מצאו בתחום הנתון את שיעורי נקודות הפיתול של הפונקציה.
ב. מצאו באילו תחומים הפונקציה קעורה כלפי מעלה ($\cup$), ובאילו תחומים היא קעורה כלפי מטה ($\cap$).
ג. ידוע כי בתחום הנתון נגזרת הפונקציה מתאפסת רק ב- $x = 1.025$ בקירוב. על סמך הנתונים והסעיפים הקודמים, שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

פתרון

א. נבדוק באילו נקודות מתאפסת הנגזרת השנייה של הפונקציה:

$$y = \frac{x^2}{4} - \sin x$$

$$y' = \frac{x}{2} - \cos x$$

$$y'' = \frac{1}{2} + \sin x = 0$$

$$\sin x = -0.5$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

הנקודות $x = \frac{7\pi}{6}$ ו- $x = \frac{11\pi}{6}$ הן לכן נקודות הפיתול של הפונקציה. ערכי הפונקציה

בנקודות אלה הם:

$$y\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\left(\frac{7\pi}{6}\right)^2}{4} - \sin \frac{7\pi}{6} = 3.86$$

$$y\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\left(\frac{11\pi}{6}\right)^2}{4} - \sin \frac{11\pi}{6} = 8.79$$

ב. כדי לבדוק את תחומי הקמירות והקעירות של הפונקציה, נבדוק את סימני הנגזרת השנייה של הפונקציה בשלושת התחומים שנוצרו מתחום ההגדרה על ידי שתי נקודות הפיתול:

- בתחום $0 \leq x < \frac{7\pi}{6}$, נחשב את סימן הנגזרת השנייה בנקודה $x = \frac{\pi}{2}$

(בחרתי נקודה זו כיוון שהסינוס מתאפס בה):

$$y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} > 0$$

ולכן בתחום זה הנגזרת השנייה חיובית והפונקציה קעורה כלפי מעלה

.($\cup$)

- בנקודה $\frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$ נחשב את סימן הנגזרת השנייה בנקודה $x = \frac{3\pi}{2}$

$$y''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \sin \frac{3\pi}{2} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$$

ולכן בתחום זה הנגזרת השנייה שלילית והפונקציה קעורה כלפי מטה

.($\cap$)

- בתחום $\frac{11\pi}{6} < x \leq 2\pi$ נחשב את סימן הנגזרת השנייה בנקודה $x = \frac{23\pi}{12}$

$$y''\left(\frac{23\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} + \sin \frac{23\pi}{12} = \frac{1}{2} - 0.2588 = 0.2415 > 0$$

ולכן בתחום זה הנגזרת השנייה חיובית והפונקציה קעורה כלפי מעלה

.($\cup$)

ג. בתחום הנתון נגזרת הפונקציה מתאפסת רק ב- $x = 1.025$ בקירוב. ערך הנגזרת השנייה בנקודה זו הוא:

$$y''(1.025) = \frac{1}{2} + \sin(1.025) = 1.35 > 0$$

ולכן ב- $x = 1.025$ יש לפונקציה מינימום מקומי. ערך הפונקציה בנקודה זו הוא:

$$y(1.025) = \frac{(1.025)^2}{4} - \sin(1.025) = -0.59$$

על סמך כל הנתונים האלה, שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה הוא:

