

שאלות בפונקציות טריגונומטריות

שאלה 1:

$$\text{נתון } y = x + 2 \sin x \quad \text{בתחום } 0 \leq x \leq 2\pi$$

מצא נקודות המקסימום והמינימום.

פתרון:

$$\text{נגזור ונשווה לאפס} \quad y' = 1 + 2 \cos x = 0$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \text{מכאן בתחום שלנו} \quad x = \pi \pm \frac{\pi}{3}$$

בשתי נקודות בתחום יכולות להיות מקסימום, מינימום (או פיתול)..
נבדוק את הנגזרת השנייה.

$$y'' = -2 \sin x$$

נציב את ה x -ים שמצאנו ונמצא את ערכי y המתאימים.

$$x_1 = \frac{2\pi}{3} \quad x_2 = \frac{4\pi}{3}$$

$$y_1'' = -2 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = - \quad \text{לכן כאן יש נקודת מקסימום}$$

$$y_2'' = -2 \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = + \quad \text{לכן כאן יש נקודת מינימום}$$

נציב את ה x -ים ונקבל את ערכי הפונקציה בנקודות.

$$y_1 = \frac{2\pi}{3} + 2 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} + 2 * \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.83$$

$$y_2 = \frac{4\pi}{3} + 2 \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} + 2 * \frac{-\sqrt{3}}{2} = 2.46$$

הנקודות $P_1(\frac{2\pi}{3}; 3.83)$ מינימום ו $P_2(\frac{4\pi}{3}; 2.46)$ מקסימום

נראה עכשיו נקודות פיתול..

$$y'' = -2 \sin x = 0 \quad \text{את הנגזרת השנייה נשווה לאפס}$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 + n\pi \quad \text{זה קורה כאשר:}$$

ובתחום שלנו בנקודות: $0, \pi, 2\pi$ יש פיתול.

*תוספת למתקדמים (לא דרוש בבחינה)

אפשר לדעת את "זווית הפיתול" על ידי הצבת ערכים אלו בנגזרת

הראשונה. ניקח את הנקודה π

$$y' = 1 + 2 \cos x = 1 + 2 \cos \pi = 1 + 2 * (-1) = -1$$

הזווית היא 135°

שאלה 2:

נתונה הפונקציה: $y = \cos^2 x - \cos x$ בתחום $0 \leq x < 2\pi$

מצא נקודות קיצון ופיתול.

פתרון:

$$y' = 2 \cos x * (-\sin x) + \sin x = 0 \quad \text{נגזור ונשווה לאפס:}$$

$$\sin x (1 - 2 \cos x) = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 + n\pi \quad \text{מכאן:}$$

$$1 - 2 \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} (60^\circ), \frac{5\pi}{3} (300^\circ)$$

נגזור נגזרת שנייה ונציב את הערכים :

$$\begin{aligned}y'' &= -2 \sin x * (-\sin x) + (-\cos x) * 2 \cos x - \cos x = \\&= 2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x + \cos x = 2(1 - \cos^2 x) - 2 \cos^2 x + \cos x = \\&= -4 \cos^2 x + \cos x + 2\end{aligned}$$

בנקודות $0, \pi$ $y'' = -1, -3$ לכן נקודות מקסימום.

בנקודה $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ $y'' = +$ ה לכן נקודות מינימום.

למציאת נקודות פיתול נשווה נגזרת שנייה לאפס:

$$-4 \cos^2 x + \cos x + 2 = 0$$

מתוך פתרון של משוואה ריבועית נקבל:

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+32}}{-8} = \frac{1 \pm 5.744}{8} \Rightarrow \cos x = 0.843, -0.593$$

תוספת למתקדמים (לא דרוש בבחינה):

"זוויות הפיתול" המתאימות הן: $x = 32.5^0, 126.35^0, 233.65^0, 327.5^0$

בנקודות אלו יש פיתול.