

חקירת פונקצית טריגונומטריות

שאלה

נתונה הפונקציה

$$f(x) = \frac{2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

בתחום $-3\pi \leq x \leq 3\pi$

- א. הראה כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.
ב. מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה בתחום הנתון.
ג. לפונקציה יש שלוש נקודות מקסימום בתחום הנתון. מצא את שיעורי הנקודות הללו.
ד. העבירו ישר דרך נקודות המקסימום של הפונקציה. מצא בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$ את השטח המוגבל על ידי הישר, על ידי גרף הפונקציה, על ידי שתי האסימפטוטות ועל ידי ציר ה- x .

פתרון

א. $\cos(-t) = \cos(t)$

$$f(-t) = \frac{2 \cos^2\left(\frac{-t}{2}\right) - 1}{2 \cos^2\left(\frac{-t}{2}\right)} = \frac{2 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1}{2 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} = f(t)$$

ב. אסימפטוטות אנכיות: נשווה את המכנה ל-0.

$$2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x = \pi + 2\pi k$$

בתחום ההגדרה תהיינה אסימפטוטות אנכיות ב: $x = -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi$

ג.

$$u = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \cos x$$

$$u' = -2 \cdot 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = -\sin x$$

$$v' = -\sin x$$

$$f(x) = \frac{\cos x}{\cos x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin x \cdot (\cos x + 1) + \sin x \cdot \cos x}{4 \cos^4\left(\frac{x}{2}\right)} = -\frac{\sin x}{4 \cos^4\left(\frac{x}{2}\right)} = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k$$

בתחום ההגדרה: $x = -2\pi, 0, 2\pi$

$$\cos -2\pi = \cos 0 = \cos 2\pi = 1$$

ולכן כשנציב בפונקציה נקבל

$$f(-2\pi) = f(0) = f(2\pi) = \frac{\cos 0}{\cos 0 + 1} = \frac{1}{2}$$

וכך נקבל את שלושת הנקודות: $\left(-2\pi, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(2\pi, \frac{1}{2}\right)$

נגזור נגזרת שניה על מנת לבדוק את סוג הנקודות

$$f''(x) = -\cos x$$

$$f''(-2\pi) = f''(0) = f''(2\pi) = -1 < 0$$

שלושת הנקודות הן נקודות מקסימום.

.7

$$f(x) = 0$$

$$2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0$$

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{x_1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{x_1}{2} = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x_1 = \pm \frac{\pi}{2} + 4\pi k$$

$$\cos\left(\frac{x_2}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{x_2}{2} = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x_2 = \pm \frac{3\pi}{2} + 4\pi k$$

$$0 < x_A < \pi \Rightarrow x_A = \frac{\pi}{2}$$

$$S_{OBCD} = \frac{1}{2} \cdot \pi$$

$$S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right) dx$$

נוכיח בנגזרת

$$\left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$S_2 = \left[x - \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{\pi}{2} - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - [0 - \tan 0] = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{s}_1 = \boldsymbol{2}$$