

שאלה בפונקציות טריגונומטריות

שאלה

נתונה הפונקציה $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

א. הוכיחו כי הנגזרת של הפונקציה היא $y' = -\sin 4x$

בתחום הנתון מצאו את:

ב. שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבעו את סוגן.

ג. שיעורי ה- x של נקודות הפיתול של הפונקציה.

ד. התחומים בהם הפונקציה קעורה כלפי מטה ($\cap$).

פתרון

א. נגזור, ונשתמש בזהויות טריגונומטריות:

$$\begin{aligned} y' &= 4 \sin^3 x \cos x - 4 \cos^3 x \sin x = 2 \cdot 2 \sin x \cos x \cdot (\sin^2 x - \cos^2 x) = \\ &= 2 \cdot \sin 2x \cdot (-\cos 2x) = -2 \sin 2x \cos 2x = -\sin 4x \end{aligned}$$

ב. כדי למצוא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום ההגדרה, נשווה

את נגזרת הפונקציה ל-0

$$y' = -\sin 4x = 0$$

$$4x = 0, \quad \pi, \quad 2\pi$$

$$x = 0, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{2}$$

קיבלנו כי לפונקציה 3 נקודות חשודות כנקודות קיצון בתחום ההגדרה. כדי לסווג את

נקודות הקיצון, נבדוק את סימן הנגזרת השנייה של הפונקציה בנקודות אלה:

$$y'' = 4 \cos 4x$$

$$y''(0) = 4 \cos 0 = 4 > 0 \Rightarrow \max$$

$$y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \cos \pi = -4 < 0 \Rightarrow \min$$

$$y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \cos 2\pi = 4 > 0 \Rightarrow \max$$

ג. כדי למצוא את שיעורי ה- x של נקודות הפיתול של הפונקציה בתחום ההגדרה, נשווה את הנגזרת השנייה ל-0:

$$4 \cos 4x = 0$$

$$4x = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{8}, \quad \frac{3\pi}{8}$$

ד. הפונקציה קעורה כלפי מטה ($\cap$) כאשר נגזרתה השנייה חיובית. לפי תוצאת סעיף ג,

תחום ההגדרה של הפונקציה מתחלק לשלושה תחומים בהן ערך הנגזרת השנייה שונה

$$\text{מ-0: } x \leq 0 < \frac{\pi}{8}, \quad \frac{\pi}{8} < x < \frac{3\pi}{8}, \quad \text{ו-} \frac{3\pi}{8} < x \leq \frac{\pi}{2}. \text{ נחשב את סימן הנגזרת השנייה של}$$

הפונקציה בכל אחד מהתחומים.

בתחום $x \leq 0 < \frac{\pi}{8}$, נחשב את הנגזרת השנייה עבור $x = 0$: $y''(0) = 4 > 0$ ולכן

בתחום זה הנגזרת השנייה חיובית ופונקציה קעורה כלפי מטה בתחום זה. באופן דומה

נמצא כי הפונקציה קעורה כלפי מטה גם בתחום $\frac{3\pi}{8} < x \leq \frac{\pi}{2}$, ואילו בתחום

$\frac{\pi}{8} < x < \frac{3\pi}{8}$ הפונקציה קעורה כלפי מעלה ($\cup$).