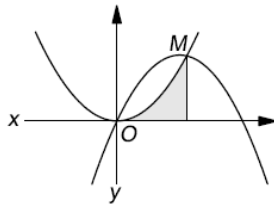


שתי שאלות בבעיות ערך קיצון

שאלה 1



הגרפים של הפונקציות $f(x) = -x^2 + x$ ו- $g(x) = ax^2$ ($a > 0$)

נחתכים בנקודות O ו- M .

מהנקודה M הורידו אנך לציר x .

א. הבע באמצעות a את שיעור x של הנקודה M ,

ואת השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי האנך ועל ידי ציר x .

ב. חשב את ערך a , שעבורו השטח שהבעת בסעיף א' הוא מקסימלי.

פתרון

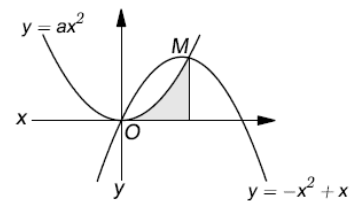
א. $f(x) = -x^2 + x$, $g(x) = ax^2$, $x_M = ?$, $S = ?$ ($a > 0$)

$$-x^2 + x = ax^2 \Rightarrow (a+1)x^2 - x = 0$$

$$x((a+1)x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_M = \frac{1}{a+1}$$

$$S = \int_0^{\frac{1}{a+1}} ax^2 dx = \frac{ax^3}{3} \Big|_0^{\frac{1}{a+1}}$$

$$S = \frac{a}{3(a+1)^3} - 0 \Rightarrow S = \frac{a}{3(a+1)^3} \text{ (יחידות ריבועיות)}$$



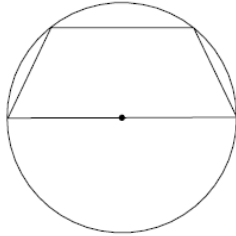
ב. $\max S \Rightarrow a = ?$

$$g(a) = \frac{a}{3(a+1)^3} \Rightarrow g'(a) = \frac{3(a+1)^3 - 9a(a+1)^2}{9(a+1)^6} = \frac{(a+1) - 3a}{3(a+1)^2} = \frac{1-2a}{3(a+1)^2} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

גזירת המונה של הנגזרת הראשונה (המכנה ב- x החשוד חיובי, גם לאחר הצמצום!).

$$(1-2a)' = -2 \Rightarrow g''\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow a_{\max} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

שאלה 2



נתון מעגל שרדיוסו R . במעגל זה חסום טרפז שווה-שוקיים, כך שהבסיס הגדול של הטרפז הוא קוטר במעגל. מבין כל הטרפזים החסומים באופן זה, הבע באמצעות R את אורך הבסיס הקטן בטרפז ששטחו מקסימלי.

פתרון

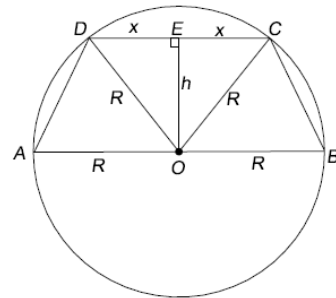
$$h = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$S = \frac{(AB+CD) \cdot h}{2} = \frac{(2R+2x) \cdot \sqrt{R^2-x^2}}{2} = (R+x)\sqrt{R^2-x^2}$$

S היא פונקציה חיובית, ולכן מקסימום שלה מתקבל

באותם שיעורי x שבהן S^2 מקבלת מקסימום

$$S^2 = y = (R+x)^2(R^2-x^2) = (R^2+2Rx+x^2)(R^2-x^2)$$



$$y' = 2(R+x)(R^2-x^2) + (R+x)^2 \cdot (-2x) = 2(R+x)(R^2-x^2-x(R+x)) = 2(R+x)(-2x^2-Rx+R^2) \stackrel{?}{=} 0$$

נגזרת של מכפלה

$$x_1 = -R \quad (\times) \quad \underset{x>0}{\uparrow}, \quad x_{2,3} = \frac{R \pm \sqrt{R^2+8R^2}}{-4} = \frac{R \pm 3R}{-4} \rightarrow x_2 = \frac{4R}{-4} = -R \quad (\times) \quad \underset{x>0}{\uparrow}, \quad x_3 = \frac{-2R}{-4} = \frac{R}{2} \quad (\checkmark)$$

$$y'' = (2R^3 - 6x^2R - 4x^3)' = -12xR - 12x^2 \Rightarrow y''\left(\frac{R}{2}\right) = -6R^2 - 3R^2 < 0 \Rightarrow x_{\max} = \frac{R}{2}$$

$$CD = 2x = 2 \cdot \frac{R}{2} \Rightarrow CD = R \quad (\text{יחידות אורך})$$