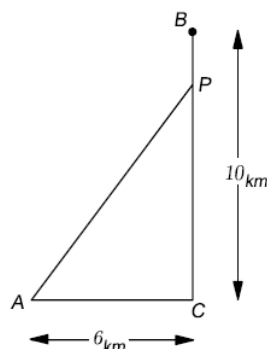


שלוש שאלות בבעיות ערך קיצון

שאלה 1



גיפ יוצא מנקודה A שבחולות וצריך להגיע לנקודה B שעל הכביש הישר BC. מרחק הנקודה A מהכביש הוא $AC = 6_{km}$ ומרחק הנקודה C מהנקודה B הוא $BC = 10_{km}$. מהירות הגיפ בחולות היא v קמ"ש, ומהירותו בכביש היא $2.6v$ קמ"ש. נקודה P נמצאת על הכביש BC. באיזה מרחק מהנקודה C צריכה להימצא הנקודה P, כדי שזמן הנסיעה של הגיפ במסלול APB יהיה הקצר ביותר?

פתרון

נסמן: $PC = x \Leftrightarrow BP = 10 - x$. נוסחאות דרך/מהירות/זמן: $t = \frac{s}{v}$, $s = tv$.

$$\triangle PCA: AP = \sqrt{6^2 + x^2} = \sqrt{36 + x^2} \Rightarrow t_{AP} = \frac{\sqrt{36 + x^2}}{v}$$

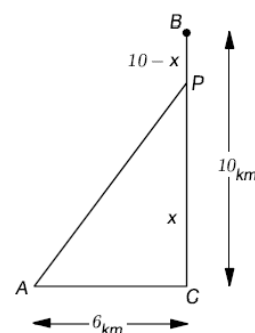
$$t_{PB} = \frac{10 - x}{2.6v} \Rightarrow \text{time: } f(x) = \frac{\sqrt{36 + x^2}}{v} + \frac{10 - x}{2.6v}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{2v\sqrt{36 + x^2}} - \frac{1}{2.6v} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\frac{x}{v\sqrt{36 + x^2}} = \frac{1}{2.6v} \Rightarrow 2.6x = \sqrt{36 + x^2} \quad /(\quad)^2$$

$$\Rightarrow 6.76x^2 = 36 + x^2 \Rightarrow 5.76x^2 = 36$$

$$\Rightarrow x^2 = 6.25 \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow x = \pm 2.5, \quad x \geq 0 \Rightarrow x = 2.5_{km}$$



בדיקה שאכן מתקבל מינימום בנקודה $x = 2.5$. התחום של x : $0 \leq x \leq 10$

x	0		2.5		10
y'		-*	0	+**	
y		\	min	/	

$\Rightarrow \min (\checkmark)$

$$y' = \frac{1}{v} \left(\frac{x}{\sqrt{36+x^2}} - \frac{1}{2.6} \right) \Rightarrow (*) \quad f'(1) = \frac{1}{v} \left(\frac{1}{\sqrt{37}} - \frac{1}{2.6} \right) = -\frac{0.22}{v} < 0$$

$$(**) \quad f'(3) = \frac{1}{v} \left(\frac{3}{\sqrt{45}} - \frac{1}{2.6} \right) = \frac{0.006}{v} > 0$$

שאלה 2

מכונית צריכה לנסוע S ק"מ.

כאשר מהירות המכונית היא v קמ"ש,

הוצאות הנסיעה הן $0.004 v$ שקלים לכל ק"מ של נסיעה,

ו- $0.001 v^2$ שקלים לכל שעת נסיעה.

כמו־כן יש הוצאות נוספות של 32 שקלים לכל שעת נסיעה.

מה צריכה להיות המהירות v של המכונית, כדי שהוצאות הנסיעה יהיו מינימליות?

פתרון

בנתונים: S - קבוע, v - משתנה (בתפקיד של x), זמן הנסיעה הוא: $\frac{S}{v}$ (מהירות/דרך = זמן)

y - פונקצית ההוצאות

$$y = 0.004 v \cdot S + \frac{S}{v} \cdot 0.001 v^2 + 32 \cdot \frac{S}{v} = 0.004 S v + 0.001 S v + \frac{32S}{v}$$

$$y = 0.005 S v + \frac{32S}{v}$$

$$y' = 0.005 S - \frac{32S}{v^2} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 0.005 S = \frac{32S}{v^2} \Rightarrow v^2 = \frac{32S}{0.005 S} = 6400 \Rightarrow v = \pm 80$$

$$v > 0 \Rightarrow v \stackrel{?}{=} 80$$

$$y'' = \left(0.005 S - \frac{32S}{v^2} \right)' = \frac{64S}{v^3} \Rightarrow y''(80) = \frac{64S}{80^3} > 0 \Rightarrow \min (\checkmark) \Rightarrow v = 80_{\text{km/h}}$$

שאלה 3

הממוצע של הפונקציה על קטע $[a, b]$ מוגדר על ידי הנוסחה $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.
 עבור איזה ערך של c יש לפונקציה $f(x) = (x^2 - 2x)^4 (x - 1)$ ממוצע קטן ביותר על הקטע $[0, c]$, $c > 0$?

פתרון

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx, \quad f(x) = (x^2 - 2x)^4 (x - 1), \quad [a, b], \quad a = 0, \quad b = c \Rightarrow \frac{1}{b-a} = \frac{1}{c}$$

$$\frac{1}{c} \int_0^c ((x^2 - 2x)^4 (x - 1)) dx$$

$$x^2 - 2x = t \Rightarrow d(x^2 - 2x) = dt \Rightarrow (2x - 2)dx = dt \Rightarrow (x - 1)dx = \frac{1}{2} dt$$

$$\frac{1}{c} \int (x^2 - 2x)^4 (x - 1) dx = \frac{1}{c} \int \frac{1}{2} \cdot t^4 dt = \frac{1}{2c} \cdot \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{2c} \cdot \frac{(x^2 - 2x)^5}{5} + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} \int_0^c ((x^2 - 2x)^4 (x - 1)) dx = \frac{1}{2c} \cdot \frac{(x^2 - 2x)^5}{5} \Big|_0^c = \frac{1}{2c} \cdot \left(\frac{(c^2 - 2c)^5}{5} - 0 \right) = \frac{1}{10} \cdot \frac{(c^2 - 2c)^5}{c}$$

$$g(c) = \frac{1}{10} \cdot \frac{(c^2 - 2c)^5}{c} = \frac{1}{10} \cdot \frac{c^5 (c - 2)^5}{c} = \frac{1}{10} \cdot c^4 (c - 2)^5$$

$$g'(c) = \frac{1}{10} \cdot (4c^3 \cdot (c - 2)^5 + c^4 \cdot 5(c - 2)^4)$$

$$= \frac{1}{10} \cdot c^3 \cdot (c - 2)^4 \cdot (4(c - 2) + 5c)$$

$$= \frac{1}{10} \cdot c^3 \cdot (c - 2)^4 \cdot (9c - 8) \stackrel{?}{=} 0, \quad c > 0 \Rightarrow c_1 = 2, \quad c_2 = \frac{8}{9}$$

c	0		$\frac{8}{9}$		2	
g'	$\emptyset$	$+++-=-$	0	$++++=+$	0	$++++=+$
g	$\emptyset$	$\searrow$	min	$\nearrow$	infl.	$\nearrow$

$$\Rightarrow c = \frac{8}{9}$$

לא נדרש:

