

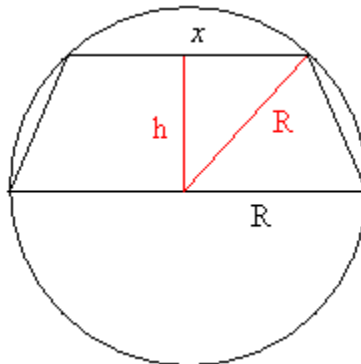
שאלה בבעיות ערך קיצון

שאלה

במעגל שרדיוסו R חסום טרפז שווה שוקיים. הבסיס הגדול של הטרפז הוא קוטר המעגל. מבין כל הטרפזים החסומים באופן זה, הביעו באמצעות R את הבסיס הקטן של הטרפז ששטחו מקסימלי.

פתרון

ממרכז המעגל, נעלה אנך אל הבסיס הקטן של הטרפז, שגם חוצה אותו לשניים. זהו גובה הטרפז שנסמנו ב- h . נסמן את אורכו של הבסיס הקטן של הטרפז ב- x . אם נחבר את מרכז המעגל אל אחד מהקודקודים שליד הבסיס הקטן של הטרפז, נקבל משולש ישר זווית שאורך היתר שלו הוא R .



על פי משפט פיתגורס, גובה הטרפז הוא לכן

$$h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - x^2}$$

ומכאן – שטח הטרפז הוא:

$$S = \frac{1}{2} \cdot (2R + x) \cdot \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - x^2} = \frac{1}{4} \cdot (2R + x) \cdot \sqrt{4R^2 - x^2}$$

מכאן ניתן לגזור את S לפי x ולמצוא את x עבורו שטח הטרפז מקסימלי. אולם, הגזירה מסובכת למדי, ולכן אציע כאן טריק להקלת הפתרון. הטריק הוא כדלהלן: אם שטח הטרפז מקסימלי, גם השטח בריבוע מקסימלי – ולכן אותו x שיביא את השטח למקסימום יביא גם את ריבוע השטח למקסימום. לכן, נעלה את S בריבוע – ועל ידי כך ניפטר מהשורש והגזירה תהיה קלה יותר.

$$S^2 = \frac{1}{16} \cdot (2R+x)^2 \cdot (4R^2 - x^2)$$

כעת נגזור את S^2 לפי x , תוך כדי שימוש בכלל המכפלה:

$$(S^2)' = \frac{1}{16} \cdot [2(2R+x) \cdot (4R^2 - x^2) + (2R+x)^2 \cdot (-2x)]$$

מהשוואת הנגזרת ל-0 נקבל את המשוואה:

$$2(2R+x) \cdot (4R^2 - x^2) + (2R+x)^2 \cdot (-2x) = 0$$

$$2(2R+x) \cdot (4R^2 - x^2) = 2x \cdot (2R+x)^2$$

$$4R^2 - x^2 = x \cdot (2R+x)$$

$$4R^2 - x^2 = 2Rx + x^2$$

$$2x^2 + 2Rx - 4R^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 8R^2}}{2} = \frac{-R \pm 3R}{2} = R$$

הערות:

(1) כיוון ש- R חיובי ו- $x \geq 0$ מותר לצמצם ב- $(2R+x)$.

(2) בפתרון המשוואה הריבועית, רק השורש החיובי ייתן x אי שלילי המתאים

לתנאי הבעיה. אין צורך לבדוק את הפתרון השני.

נוודא כי קיבלנו נקודת מקסימום על ידי כך שנוודא כי ערך הנגזרת השניה בנקודה $x = R$ הוא שלילי. נפשט תחילה את הביטוי עבור הנגזרת הראשונה:

$$\begin{aligned}(S^2)' &= \frac{1}{16} \cdot [2(2R+x) \cdot (4R^2 - x^2) + (2R+x)^2 \cdot (-2x)] = \\ &= \frac{1}{8} \cdot [(2R+x) \cdot (4R^2 - x^2) - x(2R+x)^2] = \\ &= \frac{1}{8} \cdot (2R+x) \cdot (4R^2 - 2Rx - 2x^2)\end{aligned}$$

ולכן

$$(S^2)'' = \frac{1}{8} \cdot [(4R^2 - 2Rx - 2x^2) + (2R+x) \cdot (-2R - 4x)]$$

ואכן בנקודה $x = R$

$$\begin{aligned}(S^2)'' \Big|_{x=R} &= \frac{1}{8} \cdot [(4R^2 - 2R \cdot R - 2R^2) + (2R+R) \cdot (-2R - 4R)] = \\ &= \frac{1}{8} \cdot [0 + 3R \cdot (-6R)] = -\frac{18R}{8} < 0\end{aligned}$$