ארבע שאלות בבעיות ערך קיצון

שאלה 1

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2-24}$.

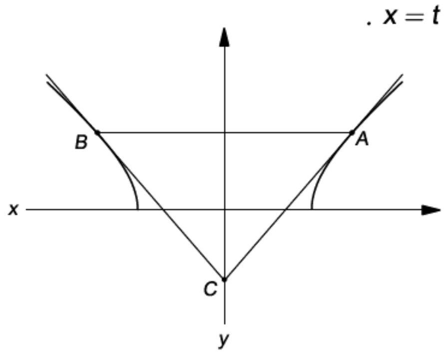
העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A שבה $x=t$.

מנקודה A העבירו ישר המקביל לציר x

וחותך את גרף הפונקציה בנקודה B .

בנקודה B העבירו עוד משיק לגרף הפונקציה.

המשיקים נפגשים בנקודה C שעל ציר y .



א. הראה כי הפונקציה זוגית.

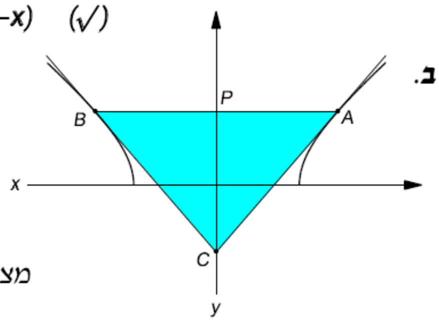
ב. מצא את השטח המינימלי של המשולש ABC .

פתרון

א.

$$f(-x)=\sqrt{(-x)^2-24}=\sqrt{x^2-24}=f(x) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f(x)=f(-x)} \quad (\checkmark)$$

ב.



$$y_B=y_A \ , \ f(x)=f(-x) \quad \Rightarrow \quad x_B=-x_A=-t$$

$$AB=x_A-x_B=t-(-t)=2t$$

מציאת משוואת הישר המשיק ב־ A

$$x_A=t \quad \Rightarrow \quad y_A=f(t)=\sqrt{t^2-24}$$

$$f'(x)=\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-24}} \quad \Rightarrow \quad f'(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2-24}}$$

$$\underbrace{y-\sqrt{t^2-24}=\frac{t}{\sqrt{t^2-24}}(x-t)}_{\text{נוסחת הישר המשיק}} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{t}{\sqrt{t^2-24}}x-\frac{t^2}{\sqrt{t^2-24}}+\sqrt{t^2-24}$$

$$y=\frac{t}{\sqrt{t^2-24}}x+\frac{t^2-24-t^2}{\sqrt{t^2-24}} \quad \Rightarrow \quad \underline{y=\frac{t}{\sqrt{t^2-24}}x-\frac{24}{\sqrt{t^2-24}}}$$

$$x_C=0 \quad \Rightarrow \quad y_C=-\frac{24}{\sqrt{t^2-24}}$$

$$h_{\triangle} = PC = y_P - y_C = y_A - y_C$$

$$= \sqrt{t^2-24} - \left(-\frac{24}{\sqrt{t^2-24}}\right) = \frac{t^2-24+24}{\sqrt{t^2-24}} = \frac{t^2}{\sqrt{t^2-24}}$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 2t\cdot \frac{t^2}{\sqrt{t^2-24}}$$

$$S_{\triangle} = g(t) = \frac{t^3}{\sqrt{t^2-24}}$$

$$g'(t) = \frac{3t^2\sqrt{t^2-24} - t^3\cdot\frac{\cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{t^2-24}}}{t^2-24} = \frac{3t^2(t^2-24)-t^4}{(t^2-24)^{1.5}} = \frac{3t^4-72t^2-t^4}{(t^2-24)^{1.5}}$$

$$= \frac{2t^4-72t^2}{(t^2-24)^{1.5}} = \frac{2t^2(t^2-36)}{(t^2-24)^{1.5}} \overset{?}{=} 0 \quad , \quad t>0 \quad \Rightarrow \quad t=6$$

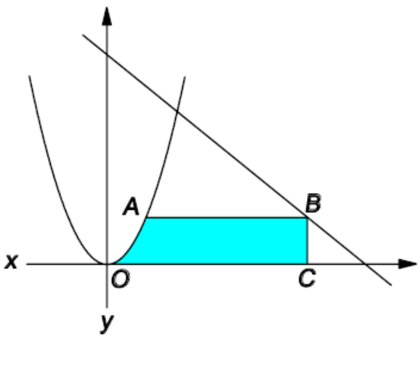
$g(t)$ היא פונקציה חיובית, בהיותה מתארת גודל שטח.

לכן, כדי לדעת את הסימן של $g''(t)$ עבור t כלשהו מספיק למצוא את סימן המונה של $g'(t)$.

$$(2t^4-72t^2)' = 8t^3-144t \quad , \quad 8\cdot 6^3 - 144\cdot 6 = 864 > 0 \quad \Rightarrow \quad g''(6)>0 \quad \Rightarrow \quad \min\ (\surd)$$

$$S_{min} = g(6) = \frac{6^3}{\sqrt{6^2-24}} = \frac{216}{\sqrt{36-24}} = \frac{216}{\sqrt{12}} = \frac{216}{2\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S_{min} = \frac{108}{\sqrt{3}} = 62.35}$$ **(יחידות ריבועיות)**

שאלה 2



נתונות הפונקציות $y=x^2$ ו־ $x+y=10$.

דרך נקודה A שבה $x=m$, $m>0$,

הנמצאת על גרף הפונקציה $y=x^2$,

העבירו ישר המקביל לציר x,

וחותך את גרף הפונקציה $x+y=10$ בנקודה B.

דרך הנקודה B העבירו ישר המקביל לציר y.

ישר זה חותך את ציר x בנקודה C.

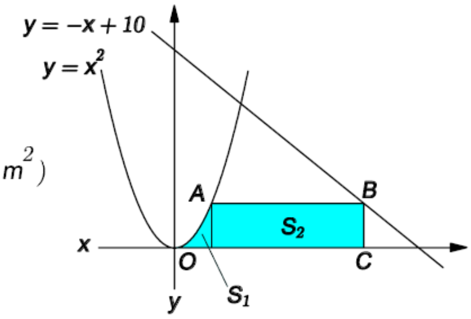
עבור איזה ערך של m השטח $OABC$ (O ראשית הצירים) הוא מקסימלי?

פתרון

ניסוח השאלה אינו חד־משמעי.

בהסתמך על הציור הנתון, אנו מניחים שכוונת השואל היא שהנקודה A היא ברביע הראשון,

בתחום שבו בפרבולה היא מתחת הקו הישר.



$$x_A = m \quad \Rightarrow \quad y_A = m^2 \quad \Rightarrow \quad A(m, m^2)$$

$$y_B = y_A = m^2 \quad \Rightarrow \quad m^2 = -x_B + 10$$

$$\Rightarrow \quad x_B = 10 - m^2 \quad \Rightarrow \quad B(10 - m^2, m^2)$$

$$AB = x_B - x_A = 10 - m^2 - m$$

$$BC = y_B = m^2$$

$$S_2 = BC \cdot AB = m^2(-m^2 - m + 10) = -m^4 - m^3 + 10m^2$$

$$S_1 = \int_0^m x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^m = \frac{m^3}{3} - 0 = \frac{m^3}{3}$$

$$S = S_1 + S_2 = f(m) = -m^4 - m^3 + 10m^2 + \frac{m^3}{3} = -m^4 - \frac{2m^3}{3} + 10m^2$$

$$f'(m) = -4m^3 - 2m^2 + 20m = -2m(2m^2 + m - 10) \overset{?}{=} 0$$

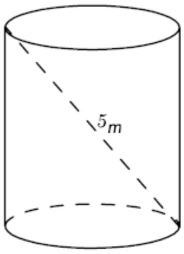
$$m_1 = 0 \ , \ m_{2,3} = \frac{-1 \pm 9}{4} \quad \Rightarrow \quad m_2 = 2 \ , \ m_3 = -\frac{5}{2} \quad ; \quad m > 0 \quad \Rightarrow \quad m = 2$$

$$f''(m) = -12m^2 - 4m + 20 \quad \Rightarrow \quad f''(2) = -12 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 20 = -36 < 0 \quad \Rightarrow \quad max \ (\surd)$$

עבור $m = 2$ הנקודה A נמצאת אכן בתחום שבו הפרבולה הינה מתחת הקו הישר:

ערך y בפרבולה הוא: $y = 2^2 = 4$ וערך ה־ y על הישר הוא: $y = 10 - 2 = 8$.

שאלה 3



רוצים לבנות דוד מים בצורת גליל,

כך שאורך האלכסון של החתך הצירי של הגליל יהיה 5_m .

הדוד פתוח מלמעלה.

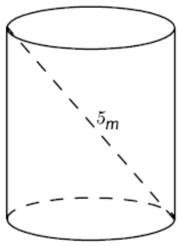
המחיר של מ״ר של החומר לבסיס הגליל גדול פי שלושה

ממחיר של מ״ר של החומר לדופן הגליל (המעטפת של הגליל).

מהו שטח הבסיס של הדוד, שעבורו המחיר של כל החומר לבניית הדוד הפתוח הוא מקסימלי?

פתרון

נקבע, ללא מגבלת הכלליות, את מחירו של מ״ר לדופן כ־ 1 ש׳ $\Leftarrow$ מחיר מ״ר בסיס = 3 ש׳



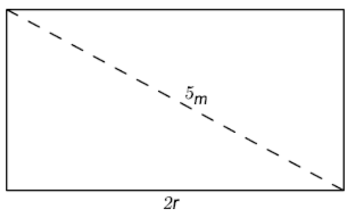
פיתגורס $h=\sqrt{25-(2x)^2} \quad \Rightarrow \quad x=r$

פונקצית המחיר: $f(x)=2\pi x\cdot\sqrt{25-4x^2}\cdot 1+\pi x^2\cdot 3$

$$f'(x)=2\pi\cdot\sqrt{25-4x^2}+\cancel{2}\pi x\cdot\frac{-8x}{\cancel{2}\sqrt{25-4x^2}}+6\pi x\overset{?}{=}0 \quad /\cdot\frac{\sqrt{25-4\pi x^2}}{2\pi}$$

$$25-4x^2-4x^2+3x\sqrt{25-4x^2}=0 \quad \Rightarrow \quad 8x^2-25=3x\sqrt{25-4x^2} \quad /(\ )^2$$

$$64x^4-400x^2+625=9x^2(25-4x^2) \quad /-9x^2(25-4x^2)$$



$$100x^4-625x^2+625=0 \quad /:25 \quad \Rightarrow \quad 4x^4-25x^2+25=0$$

$$(x^2)_{1,2}=\frac{25\pm15}{8} \quad \Rightarrow \quad (x^2)_1=\frac{40}{8}=5 \ , \ (x^2)_2=\frac{10}{8}=1\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x_1=\sqrt{5} \ , \ x_2=\sqrt{1.25}$$

$$0<2x<5 \quad \Rightarrow \quad 0<x<2.5$$

$$f'(x) = 2\pi\left(\sqrt{25-4x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{25-4x^2}} + 3x\right)$$

x	0		$\sqrt{1.25}$		$\sqrt{5}$		2.5
f'		+	0	+	0	−	
f		↗		↗	max	↘	

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad S = \pi \cdot (\sqrt{5})^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S = 5\pi}\ m^2$$

שאלה 4

נתונה הפונקציה $f(x) = \sin x$ בתחום $0 \le x \le \pi$.

מעבירים שני ישרים שמשוואותיהם: $x = a$ ו־ $x = a + \frac{\pi}{2}$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

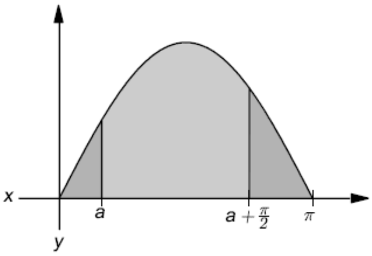
S_1 הוא השטח המוגבל על ידי שני הישרים,

על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר x.

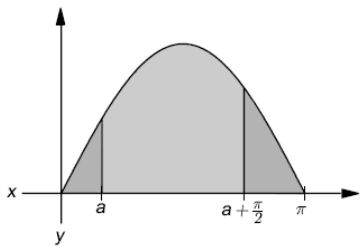
S_2 הוא סכום של שני שטחים, שכל אחד מהם מוגבל על ידי

גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי אחד הישרים ועל ידי ציר x .

מצא עבור איזה ערך של a היחס $\frac{S_1}{S_2}$ הוא מקסימלי.



פתרון



$$S_1 = \int_a^{a+\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_a^{a+\frac{\pi}{2}} =^* \sin a + \cos a$$

$$S_2 = \int_0^a \sin x\, dx + \int_{a+\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^a + (-\cos x) \Big|_{a+\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= (-\cos a + \cos 0) + (-\cos \pi + \cos(a+\tfrac{\pi}{2})) =^* -\cos a + 1 - (-1) - \sin a$$

נבדוק דוקא את מינימום היחס ההפוך $(\frac{S_2}{S_1})$ כי אז העבודה קצת יותר קלה.

ה־ x (ה־ a במקרה שלנו) שעבורו נקבל יחס מינימלי - שם מתקבל היחס המקסימלי של $\frac{S_1}{S_2}$.

$$g(a) = \frac{S_2}{S_1} = \frac{2-\sin a - \cos a}{\sin a + \cos a} = \frac{2}{\sin a + \cos a} - 1$$

$$g'(a) = \frac{-2(\cos a - \sin a)}{(\sin a + \cos a)^2} \stackrel{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \sin a = \cos a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\pi}{4}$$

$$(-2(\cos a - \sin a))' = -2(-\sin a - \cos a)$$

$$-2(-\sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4}) = -2(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}) > 0 \quad \Rightarrow \quad g''(\frac{\pi}{4}) > 0 \quad \Rightarrow \quad min$$

לכן לפונקציה ההופכית $\frac{1}{g(a)} = \frac{S_1}{S_2}$ יש מקסימום בנקודה שבה $\boldsymbol{a = \frac{\pi}{4}}$

$$(*) \quad \cos (a + \frac{\pi}{2}) = \cos (\frac{\pi}{2} - (-a)) = \sin (-a) = -\sin a$$