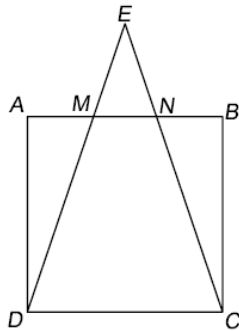


עוד שתי שאלות בבעיות ערך קיצון

שאלה 1



נתון ריבוע ABCD שאורך צלעו 10 cm .

E היא נקודה כלשהי מחוץ לריבוע,

כך שהמשולש DEC הוא שווה-שוקיים ($ED = EC$).

שוקי המשולש חותכים את הצלע AB בנקודות M ו-N.

מצא מה צריך להיות אורך הקטע AM,

כדי שסכום שטחי המשולשים EMN, AMD ו-BNC יהיה מינימלי.

פתרון

$$ED = EC \Rightarrow \angle D_1 = \angle C_1 \Rightarrow \angle D_2 = \angle C_2 \text{ (זווית)}$$

$$AD = BC \text{ (צלע)} ; \angle A = \angle B (= 90^\circ) \text{ (זווית)}$$

$$\Rightarrow \triangle AMD \cong \triangle BNM \Rightarrow AM = NB = x \Rightarrow MN = 10 - 2x$$

$$AB \parallel CD \Rightarrow \angle M_2 = \angle D_1 = \angle C_1 = \angle N_2 \Rightarrow EM = EN$$

$$EP \perp MN \Rightarrow MP = PN = \frac{10-2x}{2} = 5-x$$

$$\angle M_1 = \angle M_2 ; \angle A = \angle EPM (= 90^\circ) \Rightarrow \triangle MAD \sim \triangle MPE$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{EP} = \frac{AM}{MP} \Rightarrow \frac{10}{EP} = \frac{x}{5-x} \Rightarrow EP = \frac{50-10x}{x}$$

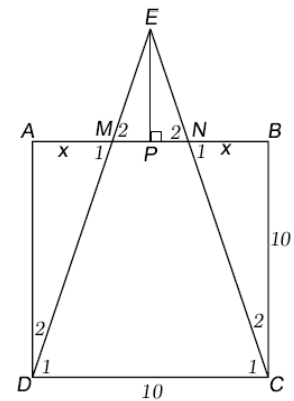
$$y = S = S_{MAD} + S_{NBC} + S_{MNE} = \frac{10x}{2} + \frac{10x}{2} + \frac{(10-2x) \cdot \frac{50-10x}{x}}{2} = 10x + \frac{(5-x)(50-10x)}{x}$$

$$y = 10x + \frac{10x^2 - 100x + 250}{x} = 10x + \frac{10x^2}{x} - \frac{100x}{x} + \frac{250}{x} = 20x + \frac{250}{x} - 100$$

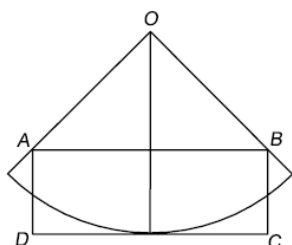
$$y' = 20 - \frac{250}{x^2} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \frac{250}{x^2} = 20 \Rightarrow x^2 = \frac{250}{20} = \frac{25}{2} = 12.5, x > 0 \Rightarrow x = \sqrt{12.5} \text{ cm}$$

$$y'' = (20 - 250x^{-2})' = -(-2) \cdot 250x^{-3} = \frac{500}{x^3} \Rightarrow y''(\sqrt{12.5}) = \frac{500}{(\sqrt{12.5})^3} > 0 \Rightarrow \min (\checkmark)$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{12.5} \text{ cm} = 3.54 \text{ cm}$$



שאלה 2



נתונה גזרה של רבע עיגול שמרכזו O ואורך מחוגו 10 cm .
 בונים מלבן $ABCD$, כך שרבע המעגל משיק לצלע DC
 בנקודת האמצע שלה, והקדקודים A ו- B נמצאים על
 הרדיוסים התוחמים את הגזרה.
 מבין כל האלכסונים של המלבנים $ABCD$ שנוצרים באופן זה,
 מצא את אורך האלכסון הקצר ביותר.

פתרון

$$(1) \angle AOB = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$$

$$(1) OE = x \Rightarrow EF = BC = 10 - x$$

$$OF \perp DC, AB \parallel DC \Rightarrow OE \perp AB \Rightarrow AEFD, BEFC \text{ מלבנים}$$

$$(1) DF = FC \Rightarrow (2) AE = EB \Rightarrow (3) OA = OB$$

$$\Rightarrow (4) \angle OAB = \angle OBA = (5) 45^\circ \Rightarrow (6) \angle AOE = \angle BOE (= 45^\circ)$$

$$\Rightarrow \angle EOB = \angle EBO (= 45^\circ) \Rightarrow (7) BE = EO = AE = x$$

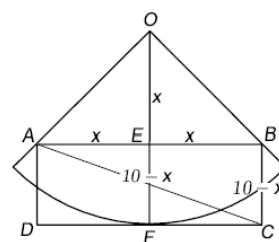
$$\underline{\triangle ABC}: (8) AC = f(x) = \sqrt{(2x)^2 + (10 - x)^2}$$

פונקצית המרחק היא פונקציה חיובית, ולכן:

שיעורי x של נקודות הקיצון שלה הן שיעורי x של נקודות הקיצון של ריבוע הפונקציה:

$$g(x) = (f(x))^2 = (2x)^2 + (10 - x)^2 = 4x^2 + 100 - 20x + x^2 = 5x^2 - 20x + 100$$

$$g'(x) = 10x - 20 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x = 2$$



$$g''(x) = 10 \Rightarrow g''(2) = 10 > 0 \Rightarrow \min (\checkmark)$$

$$\Rightarrow \min f(x) = f(2) = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} \Rightarrow \min AC = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

(1) נתון

(2) צלעות נגדיות במלבן שוות זו לזו

(3) משולש שגובה שלו הוא גם תיכון הוא משולש שווה-שוקים

(4) זוויות בסיס במשולש שווה-שוקים שוות זו לזו

(5) השלמה ל- 180° במשולש ישר-זווית AOB

(6) גובה לבסיס במשולש שווה-שוקים הוא גם חוצה-זווית

(7) משולש שזוויות הבסיס שלו שוות זו לזו - הוא משולש שווה-שוקים

(8) משפט פיתגורס