

עוד שלוש שאלות בבעיות ערך קיצון

שאלה 1

נתונה הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x^2+2}$

א. מבין כל הישרים המשיקים לגרף הפונקציה, מצא את משוואת הישר המשיק ששיפועו מינימלי.

ב. מצא את גודל הזווית בין הכיוון החיובי של ציר x ובין הישר המשיק שמצאת בסעיף א.

פתרון

$$f(x) = x\sqrt{x^2+2} \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x^2+2} + x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}} = \frac{x^2+2+x^2}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{2x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}$$

כדי למצוא את השיפוע המינימלי יש למצוא את המינימום המוחלט של $g(x) = f'(x)$ סימון

$$g'(x) = \left(\frac{2x^2+2}{\sqrt{x^2+2}} \right)' = \frac{4x\sqrt{x^2+2} - \frac{2x}{\sqrt{x^2+2}} \cdot (2x^2+2)}{x^2+2} = \frac{4x(x^2+2) - x(2x^2+2)}{(x^2+2)^{1.5}}$$

$$= \frac{4x^3+8x-2x^3-2x}{(x^2+2)^{1.5}} = \frac{2x^3+6x}{(x^2+2)^{1.5}} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2+2)^{1.5}} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x=0$$

m - שיפוע הישר המשיק הנדרש. $g(x)$ מוגדרת עבור כל x :

x		0	
g'	$\frac{-}{+} = -$	0	$\frac{+}{+} = +$
g	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$x_{\min(g)} = 0 \Rightarrow m_{\min} = \frac{2 \cdot 0^2 + 2}{\sqrt{0^2 + 2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow m = \sqrt{2}$$

$$f(0) = 0 \cdot \sqrt{4+0} = 0 \Rightarrow (0,0) \Rightarrow y-0 = \sqrt{2}(x-0) \Rightarrow y = \sqrt{2}x$$

ב. (מדדים בפשטות!) שיפוע ישר הוא טנגנס הזווית

שיוצר הישר עם הכיוון החיובי של ציר x :

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \alpha = 54.74^\circ$$

שאלה 2

נתון כי המרחק בין יישוב A ליישוב B הוא d ק"מ (d הוא קבוע).

רוכב אופניים יצא בשעה מסוימת מיישוב A ליישוב B,

ורכב במהירות קבועה של 10 קמ"ש.

באותה שעה יצא מיישוב B רוכב אופניים שני,

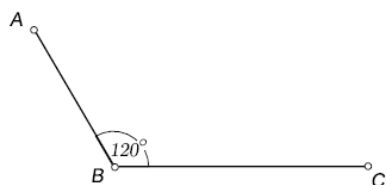
שרכב ליישוב C במהירות קבועה של 12 קמ"ש.

נתון כי הזווית ABC היא 120° .

ידוע כי המרחק בין הרוכבים יהיה מינימלי כעבור 2.5 שעות לרכיבתם

(לפני שהרוכב מ' A יגיע ל' B).

מצא את המרחק שבין יישוב A ליישוב B.



פתרון

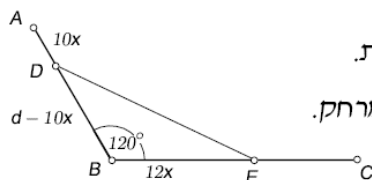
נסמן: x - משך זמן רכיבת הרוכבים

כעבור x שעות: $DB = d - 10x \Rightarrow AD = 10x$

וכן: $BE = 12x$

המרחק DE תלוי ב' x זוהי פונקצית מרחק ולכן היא חיובית.

מספיק, אם-כן, לבדוק עבור איזה x נקבל מינימום בריבוע המרחק.



נפעיל את משפט הקוסינוסים על $\triangle DBE$:

$$\begin{aligned} DE^2 = f(x) &= (d - 10x)^2 + (12x)^2 - 2 \cdot 12x \cdot (d - 10x) \cdot \cos 120^\circ \\ &= (d - 10x)^2 + 144x^2 + 12xd - 120x^2 \end{aligned}$$

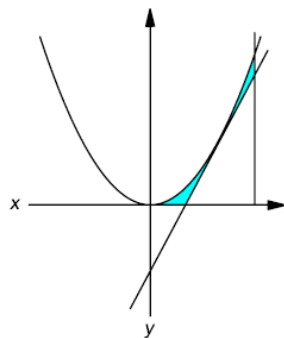
$$f'(x) = 2(d - 10x) \cdot (-10) + 288x + 12d - 240x$$

$$x_{\min} = 2.5 \Rightarrow f'(2.5) = 0 \Rightarrow -20(d - 25) + 720 + 12d - 600 = 0$$

$$\Rightarrow -8d = -620 \Rightarrow d = 77.5_{km}$$

שאלה 3

מעבירים ישר המשיק לפרבולה $y = x^2$ בנקודה שבה $x = t$, $0 < t < 3$.



א. מצא את השטח המינימלי (ערך מספרי) המוגבל על ידי המשיק,

על ידי הפרבולה, על ידי הישר $x = 3$ ועל ידי ציר x .

ב. השטח המוגבל על ידי הישר $x = 3$, על ידי ציר x

ועל ידי המשיק המתקבל עבור השטח המינימלי שמצאת בסעיף א',

מסתובב סביב ציר x .

מצא את הרדיוס של בסיס החרוט שנוצר.

פתרון

א.

משוואת הישר המשיק:

$$x_0 = t, \quad y_0 = t^2, \quad y'(t) = 2t \Rightarrow y - t^2 = 2t(x - t)$$

$$\Rightarrow y = 2tx - t^2$$

חישוב השטח:

$$S_{\Delta} : x_A : 2tx - t^2 = 0 \Rightarrow x_A = \frac{t}{2}$$

$$y_B : y = 2t \cdot 3 - t^2 \Rightarrow y_B = 6t - t^2$$

$$S_{\Delta} = \frac{(3 - \frac{t}{2}) \cdot (6t - t^2)}{2} = \frac{(6 - t)(6t - t^2)}{4} = \frac{36t - 6t^2 - 6t^2 + t^3}{4} = 9t - 3t^2 + \frac{1}{4}t^3$$

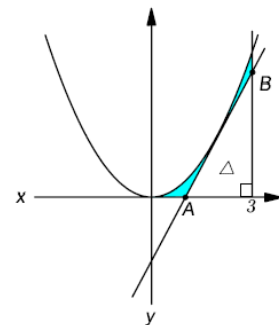
$$S = \int_0^3 x^2 dx - S_{\Delta} = \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 - S_{\Delta} = 9 - 9t + 3t^2 - \frac{1}{4}t^3$$

$$S = f(t) = 9 - 9t + 3t^2 - \frac{1}{4}t^3$$

$$f'(t) = -9 + 6t - \frac{3}{4}t^2 \stackrel{?}{=} 0 \quad / \cdot \frac{4}{3} \Rightarrow -t^2 + 8t - 12 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-8 \pm 4}{-2} = 4 \mp 2, \quad 0 < t < 3 \Rightarrow t = 2$$

$$f''(t) = 6 - \frac{3}{2}t \Rightarrow f''(2) = 6 - 3 > 0 \Rightarrow \min (\checkmark) \Rightarrow t = 2$$



$$\min S = f(2) = 9 - 9t + 3t^2 - \frac{1}{4}t^3 = 9 - 18 + 12 - 2 \Rightarrow \min S = 1 \quad (\text{יחידה ריבועית})$$

ב.

$$R = y_B = 6t - t^2, \quad t = 2 \Rightarrow R = 12 - 4 \Rightarrow R = 8 \quad (\text{יחידות אורך})$$

