

עוד שאלה בבעיות ערך קיצון

שאלה

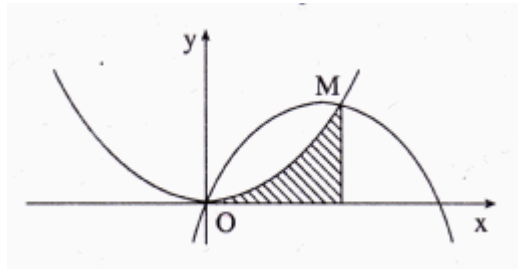
הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = -x^2 + x$$

$$g(x) = ax^2$$

$$(a > 0)$$

נחתכים בנקודות M ו-O. מהנקודה M מורידים אנך לציר ה-x.



- א. הביעו באמצעות a את שיעור ה-x של הנקודה M, ואת השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה $g(x)$, ע"י האנך וע"י ציר ה-x (השטח המקווקו בציור).
- ב. חשבו את הערך של a , שעבורו השטח שהבעתם בסעיף א' הוא מקסימאלי.

פתרון

א. הגרפים של הפונקציות נחתכים כאשר הערכים שלהן שווים:

$$-x^2 + x = ax^2$$

$$(a+1)x^2 = x$$

$$x[(a+1)x - 1] = 0$$

שיעור ה- $x=0$ שייך לנקודת החיתוך O , ולנקודת החיתוך M שייך

$$\text{השיעור } x=1/(a+1).$$

ב. השטח המקווקו שווה לאינטגרל המסויים בתחום $[0, 1/(a+1)]$ של

הפונקציה $g(x)$.

$$S = \int_0^{\frac{1}{a+1}} g(x) dx = \int_0^{\frac{1}{a+1}} ax^2 dx = \frac{ax^3}{3} \bigg|_0^{\frac{1}{a+1}} = \frac{a}{3(a+1)^3} - \frac{a \cdot 0^3}{3} = \frac{a}{3(a+1)^3}$$

ננסה למצוא את המקסימום של S כפונקציה של a . נחפש נקודות

קיצון שלה באמצעות השוואת הנגזרת שלה ל-0:

$$S'(a) = 0$$

$$[(a+1)^3 - 3a(a+1)^2] / [3(a+1)^6] = 0$$

$$(a+1)^3 - 3a(a+1)^2 = 0$$

$$a+1 > 1 \neq 0$$

$$a + 1 - 3a = 0$$

$$2a = 1$$

$$a = 1/2$$

כאשר a עוברת דרך נקודה זו, הנגזרת של S משנה את סימנה מ-
 "+" ל-"-", משמע הנקודה $a=1/2$ היא אכן נקודת המקסימום של S .
 ניתן לוודא כי זו נקודת מקסימום גם על ידי חישוב הנגזרת השניה של S
 ובדיקת סימנה בנקודה $a=0.5$.