

שתי שאלות בסדרות

שאלה 1

סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל:

$$a_1 = c$$

$$a_n + a_{n+1} = 4n$$

- א. הראו כי האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה מהווים סדרה חשבונית, וכן כי גם האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים בסדרה מהווים סדרה חשבונית.
ב. הוכיחו כי סכום $2n$ האיברים הראשונים של הסדרה אינו תלוי ב- c .
ג. מצאו עבור איזה ערך של c סדרת האיברים הזוגיים מתלכדת עם סדרת האיברים האי-זוגיים.

פתרון

א.

$$a_{n+1} + a_{n+2} = 4(n+1) = 4n + 4$$

$$a_n + a_{n+1} = 4n$$

מחסרים את המשוואות אחת מן השניה ומתקבל:

$$a_{n+2} - a_n = 4$$

- מכאן שההפרש בין כל שני איברים בסדרה הנמצאים במרחק של איבר אחד הוא קבוע, כלומר האיברים במקומות האי-זוגיים והאיברים במקומות הזוגיים מהווים כל אחד סדרה חשבונית.
ב. על מנת לחשב את S_{2n} , ניתן לחשב את סכום שתי הסדרות השלובות הנמצאות בסדרה, או שניתן לפרט את כל איברי הסדרה ולסכום אותם. נחשב בדרך השניה:

$$a_1 + a_2 = 4 \cdot 1$$

$$a_3 + a_4 = 4 \cdot 3$$

$$a_5 + a_6 = 4 \cdot 5$$

⋮

$$a_{2n-1} + a_{2n} = 4 \cdot (2n - 1)$$

.

מסיכום האגפים מתקבל כי:

$$S_{2n} = 4(1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1)$$

הביטוי שבסוגריים מהווה סדרה חשבונית בה האיבר הראשון הוא 1, ההפרש הוא 2, ומספר האיברים הוא $\frac{2n}{2}$ (כיוון שסיכמנו $2n$ איברים בזוגות), כלומר n . לאחר חישוב הסכום לפי נוסחת הסכום לסדרה חשבונית, מתקבל:

$$S_{2n} = 4 \cdot \left[\frac{n}{2} \cdot (1 + (2n - 1)) \right] = 4 \cdot \frac{2n^2}{2} = 4n^2$$

- ג. במצב המבוקש נדרש $a_1 = a_2$. כיוון שהוכח כי האיברים במקומות הזוגיים והאי-זוגיים מהווים 2 סדרות חשבוניות בעלות הפרש זהה, אם האיבר הראשון של כל סדרה יהיה שווה, גם שאר איברי הסדרה יהיו שווים זה לזה.

$$a_1 = c$$

$$a_2 = 4 \cdot 1 - c$$

$$c = 4 - c$$

$$2c = 4$$

$$c = 3$$

שאלה 2

נתונות שתי סדרות חשבוניות: $a_1, a_2, \dots, a_n$ ו- $b_1, b_2, \dots, b_n$ המקיימות: $a_1 = b_2$ ו- $a_2 = b_5$. הראו כי לכל n טבעי מתקיים:
 א. $a_n = b_{3n-1}$
 ב. $3(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = b_1 + b_2 + \dots + b_{3n}$

פתרון

א. נסמן את הפרש הסדרה a ב- d , ואת הפרש הסדרה b ב- D . כיוון ש- $a_1 = b_2$ ו- $a_2 = b_5$ נקבל כי:

$$a_2 - a_1 = b_5 - b_2$$

$$d = (b_1 + 4D) - (b_1 + D) = 3D$$

לכן

$$a_n = a_1 + (n-1)d = a_1 + (n-1) \cdot 3D = \dots$$

אבל כיוון ש- $a_1 = b_2$, נקבל כי

$$\dots = b_2 + (3n-3)D = b_1 + D + (3n-3)D =$$

$$= b_1 + (3n-2)D = b_{3n-1}$$

ב. על פי נוסחת הסכום של טור חשבוני

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{3n} = \frac{[2b_1 + (3n-1)D] \cdot 3n}{2} =$$

$$3(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 3 \cdot \frac{[2a_1 + (n-1)d] \cdot n}{2} =$$

$$= \frac{[2b_2 + (n-1) \cdot 3D] \cdot 3n}{2} = \frac{[2b_1 + 2D + (3n-3)D] \cdot 3n}{2} =$$

$$= \frac{[2b_1 + (3n-1)D] \cdot 3n}{2} = b_1 + b_2 + \dots + b_{3n}$$