

שלוש שאלות בסדרות

שאלה 1

נתונה סדרה המקיימת: $S_n - S_{n-1} = (0.41666 \dots)^n$

א. הוכח כי הסדרה היא הנדסית, ומצא את המנה שלה.

ב. מהסדרה הזו יצרו את הסדרה האינסופית: $a_1 \cdot a_2, a_2 \cdot a_3, a_3 \cdot a_4, \dots$

חשב את סכום הסדרה החדשה.

פתרון:

2. א. $S_n - S_{n-1} = (0.41666 \dots)^n$

$$S_n - S_{n-1} = 0.41666 \dots = 0.41 + 0.00666 \dots = \frac{41}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{6}{10,000} + \frac{6}{100,000} + \dots$$

סכום זה, החל מהאיבר השני, הוא סכום של סדרה הנדסית יורדת,

שבה: $a_1 = \frac{6}{1000}$ ו- $q = \frac{1}{10}$, ולכן:

$$S_n - S_{n-1} = \frac{41}{100} + \frac{\frac{6}{1000}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{41}{100} + \frac{6}{1000} : \frac{9}{10} = \frac{41}{100} + \frac{2}{100} \cdot \frac{10}{9} = \frac{41}{100} + \frac{2}{300} = \frac{3 \cdot 41 + 2}{300} = \frac{125}{300} = \frac{5}{12}$$

$$S_n - S_{n-1} = a_n \Rightarrow a_n = \left(\frac{5}{12}\right)^n \Rightarrow a_1 = \frac{5}{12}, q = \frac{5}{12} \quad (\checkmark)$$

ב.

$$a_1 \cdot a_2 = \frac{5}{12} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \left(\frac{5}{12}\right)^3, \quad a_2 \cdot a_3 = \left(\frac{5}{12}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^3 = \left(\frac{5}{12}\right)^5, \quad a_3 \cdot a_4 = \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^4 = \left(\frac{5}{12}\right)^7$$

$$\Rightarrow A_1 = \left(\frac{5}{12}\right)^3, \quad Q = \left(\frac{5}{12}\right)^2$$

$$\Rightarrow S_\infty = \frac{\left(\frac{5}{12}\right)^3}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{125}{1728} : \left(1 - \frac{25}{144}\right) = \frac{125}{1728} : \frac{119}{144} = \frac{125}{1728} \cdot \frac{144}{119} = \frac{125}{1728} \cdot \frac{144}{119} = \frac{125}{12} \cdot \frac{1}{119} \Rightarrow S = \frac{125}{1428}$$

שאלה 2

א. בסדרה הנדסית שישה איברים.

היחס בין סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים לבין סכום כל איברי הסדרה הוא $\frac{2}{3}$.

סכום האיברים במקומות הלא-זוגיים הוא 63. מצא את איברי הסדרה.

ב. פתור את המשוואה: $x^{-2} + x^{-4} + x^{-6} + \dots = 0.125$

אם נתון ש- x מקיים את אי-השוויון: $1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{16} + \dots < 1$

(אין קשר בין הסעיפים).

פתרון:

א. סכום האיברים במקומות הזוגיים: $a_2 + a_4 + a_6 = a_1 q \cdot \frac{(q^2)^3 - 1}{q^2 - 1}$

סכום כל איברי הסדרה: $S_6 = a_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1}$ היחס הנתון הוא:

$$a_1 q \cdot \frac{(q^2)^3 - 1}{q^2 - 1} : (a_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1}) = \frac{2}{3}$$

$$\frac{a_1 q(q^6 - 1)}{q^2 - 1} \cdot \frac{q - 1}{a_1(q^6 - 1)} = \frac{q(q - 1)}{q^2 - 1} = \frac{q(q - 1)}{(q - 1)(q + 1)} = \frac{q}{q + 1} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3q = 2q + 2 \Rightarrow \underline{q = 2}$$

סכום האיברים במקומות הלא-זוגיים:

$$a_1 + a_3 + a_5 = a_1 + a_1 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^4 = a_1(1 + 4 + 16) = a_1 \cdot 21 = 63 \Rightarrow \underline{a_1 = 3}$$

$$\Rightarrow 3, 6, 12, 24, 48, 96$$

ב.

$$x^{-2} + x^{-4} + x^{-6} + \dots = 0.125 = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} + \dots = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{x^2}, q = \frac{1}{x^2}, S_\infty = \frac{1}{8} \Rightarrow S_\infty = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{(\frac{1}{x^2})^\infty - 1}{\frac{1}{x^2} - 1} = \frac{1}{8}$$

אם $x^2 < 1$ אזי $\frac{1}{x^2} > 1$ ואז: $(\frac{1}{x^2})^\infty = \infty$ ואין למשוואה הנתונה פתרון.

ולכן, בהכרח $\frac{1}{x^2} < 1$ ואז הסכום הנתון הוא סכום של סדרה הנדסית מתכנסת:

$$S = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{1}{8} \Rightarrow 8 = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$\text{נתון: } 1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{16} + \dots < 1$$

$$\underline{x=3}: 1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \dots = 1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \not< 1 \Rightarrow \times$$

$$\underline{x=-3}: 1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \dots = 1 \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{7}{4}} = \frac{4}{7} < 1 \Rightarrow \checkmark \Rightarrow x = -3$$

שאלה 3

נתונה סדרה המוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל:

$$a_n = 4 \cdot 5^n + T_n + \frac{3}{4}$$

כאשר: $T_n = 3 + 15 + 75 + \dots + 3 \cdot 5^{n-1}$

א. מצא נוסחה ל- a_n (הבע באמצעות n בלבד).

ב. מצא נוסחה לסכום n האיברים הראשונים בסדרה הנתונה.

פתרון:

א.

$$T_n = 3 + 5 + 15 + \dots + 3 \cdot 5^{n-1}$$

$$T_n: a_1 = 3, q = 5 \Rightarrow T_n = 3 \cdot \frac{5^n - 1}{5 - 1} = \frac{3}{4}(5^n - 1) \quad \text{סכום סדרה הנדסית:}$$

$$a_n = 4 \cdot 5^n + T_n + \frac{3}{4} = 4 \cdot 5^n + \frac{3}{4}(5^n - 1) + \frac{3}{4} = 5^n(4 + \frac{3}{4}) - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \Rightarrow a_n = \frac{19}{4} \cdot 5^{n-1}$$

ב.

$$a_1 = \frac{19}{4} \cdot 5^0 = \frac{19}{4}, q = 5 \Rightarrow S_n = \frac{19}{4} \cdot \frac{5^n - 1}{5 - 1} \Rightarrow S_n = \frac{19(5^n - 1)}{16}$$