

שאלה בסדרות

שאלה

- נתונה סדרה הנדסית אינסופית שמנתה $4q^2$ (כאשר $0 < q < 0.5$). בין כל שני איברים בסדרה הכניסו איבר נוסף, ונוצרה סדרה הנדסית חדשה שכל איבריה חיוביים.
- א. הביעו באמצעות q את מנת הסדרה החדשה.
- ב. סכום הסדרה החדשה גדול פי $48q^2$ מסכום הסדרה הנתונה. חשבו את
- ג. עבור ערכו של q שחישבתם בסעיף ב, חשבו את היחס בין האיבר הראשון בסדרה החדשה, ובין סכום שאר האיברים שבסדרה זו.

פתרון

- נסמן את הסדרה המקורית ב- $a_1, a_2, a_3, \dots$, ואת האיברים שהוכנסו ב- $b_1, b_2, b_3, \dots$. הסדרה החדשה שהתקבלה היא לכן: $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots$.
- א. לפי תכונת הסדרה ההנדסית, נקבל כי b_1 הוא ממוצע הנדסית של a_1 ושל a_2 , כלומר,
- $$b_1^2 = a_1 \cdot a_2$$

כיוון ש- $a_1, a_2, a_3, \dots$ סדרה הנדסית שמנתה $4q^2$, הרי ש-

$$a_2 = 4q^2 a_1$$

ולכן

$$b_1^2 = a_1 \cdot 4q^2 a_1 = 4q^2 a_1^2$$

$$b_1 = 2a_1 q$$

ומכאן שמנת הסדרה ההנדסית החדשה היא

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{2a_1 q}{a_1} = 2q$$

- ב. איברה הראשון של הסדרה הנתונה הוא a_1 ומנתה $4q^2$, ולכן סכומה הוא

$$S_1 = \frac{a_1}{1 - 4q^2}$$

איברה הראשון של הסדרה החדשה גם הוא a_1 ומנתה $2q$, ולכן סכומה הוא

$$S_2 = \frac{a_1}{1-2q}$$

לפי הנתון סכום הסדרה החדשה גדול פי $48q^2$ מסכום הסדרה הנתונה, ולכן

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{a_1}{1-2q}}{\frac{a_1}{1-4q^2}} = 48q^2$$

$$\frac{1-4q^2}{1-2q} = 48q^2$$

$$\frac{(1-2q)(1+2q)}{1-2q} = 48q^2$$

$$48q^2 - 2q - 1 = 0$$

$$q = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{48} = \frac{-1 \pm 7}{48}$$

כיוון ש- $0 < q < 0.5$ יש לבחור בשורש החיובי ולכן

$$q = \frac{-1+7}{48} = \frac{1}{8}$$

ג. האיבר השני בסדרה החדשה, שמנתה $2q$, הוא $b_1 = 2a_1q$, ולכן סכום איברי הסדרה

החדשה, פרט לאיבר הראשון הוא

$$S = \frac{2a_1q}{1-2q}$$

מכאן שהיחס בין האיבר הראשון בסדרה החדשה, ובין סכום שאר האיברים שבסדרה

זו, הוא

$$\frac{a_1}{S} = \frac{a_1}{\frac{2a_1q}{1-2q}} = \frac{1-2q}{2q} = \frac{1-2 \cdot \frac{1}{8}}{2 \cdot \frac{1}{8}} = 3$$