

תרגול נוסף בסדרות

שאלה

נתונה הסדרה האינסופית: $1, \frac{x+2}{x}, (\frac{x+2}{x})^2, (\frac{x+2}{x})^3, \dots$ שכל איבריה חיוביים.

א. מצא עבור אילו ערכי x הסדרה היא סדרה הנדסית אינסופית יורדת.

ב. סכום כל האיברים במקומות הזוגיים של סדרה זו הוא $\frac{2}{3}$.

מצא את סכום הסדרה המקורית.

פתרון:

א. מנת הסדרה היא $q = \frac{x+2}{x}$ והתנאי הנדרש הוא $0 < \frac{x+2}{x} < 1$

$$(1) \quad \frac{x+2}{x} > 0 \quad / \cdot x^2 \Rightarrow x(x+2) > 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ -2 \quad 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{(x < -2) \cup (x > 0)}$$

$$(2) \quad \frac{x+2}{x} < 1 \quad / \cdot x^2 \Rightarrow x(x+2) < x^2 \Rightarrow x^2 + 2x < x^2 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow \underline{x < 0}$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow \underline{x < -2}$$

ב.

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a_2}{1-q^2} = \frac{\frac{x+2}{x}}{1-(\frac{x+2}{x})^2} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \frac{x+2}{x} = 2 \cdot \left(1 - \frac{x^2+4x+4}{x^2}\right) \quad / \cdot x^2$$

$$\Rightarrow 3x(x+2) = 2(x^2 - (x^2 + 4x + 4)) = 2(-4x - 4)$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 6x = -8x - 8 \Rightarrow 3x^2 + 14x + 8 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-14 \pm 10}{6} = \frac{-7 \pm 5}{3}$$

$$x_1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow \times \Leftarrow x < -2$$

$$x_2 = -4 \Rightarrow \checkmark \Leftarrow x < -2$$

$$q = \frac{x+2}{x} = \frac{-4+2}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \underline{S = 2}$$