

עוד שתי שאלות בסדרות

שאלה 1

נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת.

אם מחליפים את הסימנים של כל האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים

- מקבלים סדרה שסכומה קטן פי 5 מסכום הסדרה הנתונה.

מצא את המנה של הסדרה הנתונה.

פתרון:

סכום הטור המקורי: $S = \frac{a_1}{1-q}$

בהמרת הסימנים של האיברים במקומות הזוגיים,

מקבלים סדרה חדשה שאיברה הראשון (a_1) הוא איברה הראשון של הסדרה המקורית,

ושמנתה (q) היא המספר הנגדי של מנת הסדרה המקורית, כלומר: $-q$.

סכום הסדרה החדשה: $S = \frac{a_1}{1-(-q)} = \frac{a_1}{1+q}$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{1-q} = 5 \cdot \frac{a_1}{1+q} \Rightarrow 1+q = 5 \cdot (1-q) \Rightarrow 1+q = 5-5q$$

$$\Rightarrow 6q = 4 \Rightarrow q = \frac{4}{6} \Rightarrow q = \frac{2}{3}$$

שאלה 2

סדרה מוגדרת ע"י הכלל: $a_n = 2 \cdot 3^n + T_n$ כאשר: $T_n = 3 + 9 + 27 + \dots + 3^n$.

א. מצא נוסחה ל- a_n כפונקציה של n בלבד.

ב. חשב בעזרת הנוסחה שמצאת בסעיף א' את הסכום: $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

פתרון:

א. $a_n = 2 \cdot 3^n + T_n$, $T_n = 3 + 9 + 27 + \dots + 3^n$

$$T_n = 3 + 9 + 27 + \dots + 3^n = 3 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{3(3^n - 1)}{2} = \frac{3^{n+1} - 3}{2}$$

$$a_n = 2 \cdot 3^n + \frac{3^{n+1} - 3}{2} = 2 \cdot 3^n + 3^n \cdot \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 3^n \left(2 + \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} \Rightarrow a_n = \frac{7}{2} \cdot 3^n - \frac{3}{2}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \left(\frac{7}{2} \cdot 3 - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{7}{2} \cdot 3^2 - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{7}{2} \cdot 3^3 - \frac{3}{2}\right) + \dots + \left(\frac{7}{2} \cdot 3^n - \frac{3}{2}\right) \quad \text{ב.}$$

$$= \frac{7}{2} \cdot 3 + \frac{7}{2} \cdot 3^2 + \frac{7}{2} \cdot 3^3 + \dots + \frac{7}{2} \cdot 3^n - \frac{3}{2} \cdot n$$

$$= \frac{7}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} - \frac{3}{2} \cdot n = \frac{21}{2} \cdot \frac{3^n - 1}{2} - \frac{3}{2} \cdot n \Rightarrow S_n = \frac{21(3^n - 1)}{4} - \frac{3}{2} \cdot n$$