

עוד שלוש שאלות בסדרות

שאלה 1

בסדרה הנדסית אין-סופית סכום האיבר השלישי והשביעי הוא 164.
הסדרה אינה עולה ואינה יורדת. האיבר השני גדול פי 81 מהאיבר השישי.
מצא את: **א.** סכום הסדרה **ב.** סכום האיברים הנמצאים במקומות הלא-זוגיים בסדרה

פתרון:

א.

$$(I) \quad a_3 + a_7 = 164 \Rightarrow a_1 q^2 + a_1 q^6 = 164 \Rightarrow a_1 (q^2 + q^6) = 164$$

$$(II) \quad \frac{a_2}{a_6} = 81 \Rightarrow \frac{a_1 q}{a_1 q^5} = 81 \Rightarrow \frac{1}{q^4} = 81 \Rightarrow q^4 = \frac{1}{81} = \left(\pm \frac{1}{3}\right)^4 \Rightarrow q_{1,2} = \pm \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow (I) \quad a_1 = \frac{164}{q^2 + q^6} = \frac{164}{\frac{1}{9} + \frac{1}{729}} = \frac{164}{\frac{81+1}{729}} = \frac{164 \cdot 729}{82} \Rightarrow \underline{a_1 = 1458}$$

עבור $q = \frac{1}{3}$ הסדרה או עולה או יורדת, תלוי בסימן ($\pm$) של a_1 .

עבור $q = -\frac{1}{3}$ איברי הסדרה מחליפים סימנים לסירוגין ואז היא אכן אינה עולה ואינה יורדת

$$\Rightarrow \underline{q = -\frac{1}{3}} \Rightarrow S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1458}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1458}{\frac{4}{3}} = \frac{3 \cdot 1458}{4} = \frac{4374}{4} \Rightarrow \underline{S = 1093\frac{1}{2}}$$

ב.

$$a_1, a_3, a_5, \dots = a_1, a_1 q^2, a_1 q^4, \dots$$

$$\Rightarrow S = \frac{a_1}{1-q^2} = \frac{1458}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1458}{\frac{8}{9}} = \frac{9 \cdot 1458}{8} = \frac{9 \cdot 729}{4} = \frac{6561}{4} \Rightarrow \underline{S = 1640\frac{1}{4}}$$

שאלה 2

סדרה מוגדרת לכל n טבעי ע"י הכלל: $a_{n+1} = 2n + 1 - a_n$

א. הראה כי: $S_{2n} = 2n^2 + n$

ב. הראה כי: $S_{2n+1} = a_1 + 2n^2 + 3n$

ג. נתון כי: $a_1 = -5$ מצא את האיבר הנמצא במקום ה-89 (a_{89}).

פתרון:

א.

$$a_{n+1} = 2n + 1 - a_n \Rightarrow a_n + a_{n+1} = 2n + 1$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$a_3 + a_4 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$+ a_5 + a_6 = 2 \cdot 5 + 1 = 11 +$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\frac{a_{2n-1} + a_{2n}}{= S_{2n}} = 2 \cdot (2n - 1) + 1 = \underline{4n - 1} \\ = 3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1)$$

סכומי זוגות המספרים מהווים סדרה חשבונית: $3, 7, 11, \dots$ ובה n איברים

סכום $2n$ איברי הסדרה המקורית שווה לסכום n איברי הסדרה החדשה:

$$S_{2n} = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} \cdot (3 + 4n - 1) = \frac{n}{2} (4n + 2) = n(2n + 1) \Rightarrow S_{2n} = 2n^2 + n \quad (\checkmark)$$

ג.

$$\begin{aligned}
 & a_1 \\
 & a_2 + a_3 = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \\
 & a_4 + a_5 = 2 \cdot 4 + 1 = 9 \\
 + & a_6 + a_9 = 2 \cdot 6 + 1 = 13 \quad + \\
 & \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 & \frac{a_{2n} + a_{2n+1}}{= S_{2n+1}} = 2 \cdot 2n + 1 = \underline{4n + 1} \\
 & \quad \quad \quad = a_1 + 5 + 9 + 13 + \dots + (4n + 1)
 \end{aligned}$$

סכומי זוגות המספרים ברישום זה מהווים סדרה חשבונית: $5, 9, 13, \dots$ ובה n איברים

סכום $2n + 1$ איברי הסדרה המקורית שווה לסכום n איברי הסדרה החדשה ו־ a_1 :

$$S_{2n+1} = a_1 + \frac{n}{2} \cdot (5 + 4n + 1) = a_1 + \frac{n}{2} (4n + 6) = a_1 + n(2n + 3)$$

$$\Rightarrow S_{2n+1} = a_1 + 2n^2 + 3n \quad (\checkmark)$$

ג.

נשתמש בנוסחאות שהוכחנו בסעיפים א' ו-ב' (S_{2n}, S_{2n+1}):

$$a_{89} = S_{89} - S_{88} = S_{2 \cdot 44 + 1} - S_{2 \cdot 44} = (a_1 + 2 \cdot 44^2 + 3 \cdot 44) - (2 \cdot 44^2 + 44) = a_1 + 2 \cdot 44$$

$$a_1 = -5 \quad \Rightarrow \quad a_{89} = -5 + 88 \quad \Rightarrow \quad a_{89} = 83$$

שאלה 3

נתון טור הנדסי אינסופי שסכמו גדול פי 3.5 מסכום האיברים במקומות הזוגיים.
מצא פי כמה גדול סכום הטור מסכום האיברים במקומות הלא-זוגיים.

פתרון:

נסמן: S - סכום הטור

S_1 - סכום האיברים במקומות הלא-זוגיים, S_2 - סכום האיברים במקומות הזוגיים

$$S_1 = a_1 + a_3 + a_5 + \dots = a_1 + a_1 q^2 + a_1 q^4 + \dots = \frac{a_1}{1-q^2}$$

$$S_2 = a_2 + a_4 + a_6 + \dots = a_1 q + a_1 q^3 + a_1 q^5 + \dots = \frac{a_1 q}{1-q^2}$$

$$\frac{S}{S_2} = 3\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a_1}{1-q} : \frac{a_1 q}{1-q^2} = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{a_1}{1-q} \cdot \frac{(1-q)(1+q)}{a_1 q} = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1+q}{q} = \frac{7}{2} \Rightarrow 2 + 2q = 7q \Rightarrow 5q = 2 \Rightarrow q = \frac{2}{5}$$

$$S : S_1 = \frac{a_1}{1-q} : \frac{a_1}{1-q^2} = \frac{a_1}{1-q} \cdot \frac{(1-q)(1+q)}{a_1} = 1 + q = 1 + \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{S}{S_1} = 1\frac{2}{5}$$