

שלוש שאלות בהסתברות

שאלה 1

א. על מנת להתקבל ללימודי תואר שני במינהל עסקים באוניברסיטה מסוימת,

יש לגשת למבחני GMAT.

לפני המבחן נערך קורס הכנה.

בקורס זה למדו 50% מהסטודנטים שהתכוונו למבחן.

70% מבין הסטודנטים שלמדו בקורס הצליחו במבחן.

87.5% מבין אלו שהצליחו במבחן למדו בקורס.

בחרו באקראי סטודנט שנבחן במבחן האמור.

א. מהי ההסתברות שהוא נכשל במבחן?

ב. אם ידוע שהסטודנט נכשל במבחן, מהי ההסתברות שהוא למד בקורס?

ג. נבחרו באקראי 8 סטודנטים מבין אלו שנגשו למבחן.

1. מהי ההסתברות שבדיוק 5 מהם למדו בקורס ההכנה?

2. מהי ההסתברות שבדיוק 2 מהם הצליחו במבחן?

פתרון:

נסמן: A - קבוצת הסטודנטים שהשתתפו בקורס

$\bar{A}$ - קבוצת הסטודנטים שלא השתתפו בקורס

B - קבוצת הסטודנטים שעברו בהצלחה את המבחן

$\bar{B}$ - קבוצת הסטודנטים שכשלו במבחן

נתון:

$$P(A) = P(\bar{A}) = 0.5, P(B/A) = 0.7, P(A/B) = 0.875$$

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{0.5} = 0.7 \Rightarrow P(B \cap A) = 0.5 \cdot 0.7 = 0.35$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.35}{P(B)} = 0.875 \Rightarrow P(B) = \frac{0.35}{0.875} = 0.4$$

נרשום את הנתונים בטבלה:

	A	$\bar{A}$	Σ
B	0.35	$0.4 - 0.35 = 0.05$	0.4
$\bar{B}$	$0.5 - 0.35 = 0.15$	$0.5 - 0.05 = 0.45$	$1 - 0.4 = 0.6$
Σ	0.5	0.5	1

א. ישירות מהטבלה: $P(\bar{B}) = 0.6$

ב.

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0.15}{0.6} \Rightarrow P(A/\bar{B}) = 0.25$$

ג.

פתרון ע"י נוסחת ברנולי.

$$(1) P_8(5) = \binom{8}{5} \cdot 0.5^5 \cdot 0.5^3 = 56 \cdot 0.5^8 \Rightarrow P_8(5) = 0.21875$$

$$(2) P_8(2) = \binom{8}{2} \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^6 = 28 \cdot 0.16 \cdot 0.0467 \Rightarrow P_8(2) = 0.2092$$

שאלה 2

A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי שאינם זרים. נתון: $P(A) = 0.3$, $P(A \cup B) = 0.8$.

א. מצא את $P(B)$ כאשר A ו-B הינם מאורעות בלתי תלויים.

ב. נתון כי A ו-B הינם מאורעות תלויים, וכן: $P(A \cap B) = 0.2$. מצא את $P(B)$.

ג. בנתוני סעיף ב', מצא את ההסתברויות: 1. $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ 2. $P(\bar{B}/A)$.

פתרון:

א. $P(A) = 0.3$, $P(A \cup B) = 0.8$

כאשר A ו- B הינם מאורעות בלתי תלויים מתקיים: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.8 = 0.3 + P(B) - 0.3 \cdot P(B) \quad / - 0.3$$

$$0.5 = 0.7 \cdot P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{0.5}{0.7} \Rightarrow P(B) = \frac{5}{7}$$

ב.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 0.8 = 0.3 + P(B) - 0.2 = 0.1 + P(B) \Rightarrow P(B) = 0.7$$

ג. נשתמש בנוסחה: $P(\bar{A} \cap \bar{B}) + P(A \cup B) = 1$

לא מרבים להשתמש בנוסחה זו, לכן נסביר אותה (בעזרת דיאגרמות ון):

$$\boxed{A \cap B} \Rightarrow A \cup B = \boxed{A \cap B}$$

$$\bar{A} = \boxed{A \cap B}, \bar{B} = \boxed{A \cap B} \Rightarrow \bar{A} \cap \bar{B} = \boxed{A \cap B} \Rightarrow (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (A \cup B) = \boxed{A \cap B} = S$$

$$\Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) + P(A \cup B) = 1 \quad (\checkmark)$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.8 \Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.2$$

$$P(\bar{B}/A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.3 - 0.2}{0.3} = \frac{0.1}{0.3} \Rightarrow P(\bar{B}/A) = \frac{1}{3}$$

שאלה 3

בקפיטריה של בית ספר גדול, נבדק אחוז שותי הקולה לעומת אחוז שותי הקפה בין התלמידים.

נמצא כי: 45% שותים קולה. $\frac{5}{9}$ משותי הקולה שותים גם קפה.

הקבוצה ששותה קולה אבל לא קפה מהווה $\frac{4}{13}$ מהקבוצה שאינה שותה קפה.

בוחרים באקראי תלמיד מבית הספר.

א. מהי ההסתברות שהוא אינו שותה קפה?

ב. אם נתון כי התלמיד שבחרנו שותה קפה, מהי ההסתברות שהוא שותה קולה?

ג. בוחרים באקראי 4 תלמידים מבית הספר.

מהי ההסתברות ש: **(1)** כל ה-4 שותים קולה **(2)** שניים מהם (בדיוק) שותים קפה

פתרון:

נסמן: K - קבוצת שותי הקולה, C - קבוצת שותי הקפה

נתון: $P(K) = 0.45$, $P(K/C) = \frac{5}{9}$, $P(K \cap \bar{C}) = \frac{4}{13} \cdot P(\bar{C})$

$$P(K/C) = \frac{P(K \cap C)}{P(C)} = \frac{P(K \cap C)}{0.45} = \frac{5}{9} \Rightarrow P(K \cap C) = 0.25 \quad \text{א.}$$

	K	$\bar{K}$	Σ
C	0.25	$0.55 - 0.45 = 0.1$	$1 - 0.65 = 0.35$
$\bar{C}$	$0.45 - 0.25 = 0.2$	$0.65 - 0.2 = 0.45$	$0.65^{(*)}$
Σ	0.45	$1 - 0.45 = 0.55$	1

$$(*) P(K \cap \bar{C}) = \frac{4}{13} \cdot P(\bar{C}) \Rightarrow 0.2 = \frac{4}{13} \cdot P(\bar{C}) \Rightarrow P(\bar{C}) = 0.65$$

ב.

$$P(K/C) = \frac{P(K \cap C)}{P(C)} = \frac{0.25}{0.35} \Rightarrow P(K/C) = \frac{5}{7}$$

ג. 1.

$$P = (P(K))^4 = 0.45^4 \Rightarrow P = 0.041$$

2. נוסחת ברנולי ל-2 הצלחות מתוך 4 נסיונות:

$$P = \binom{4}{2} \cdot 0.35^2 \cdot 0.65^2 = 6 \cdot 0.1225 \cdot 0.4225 \Rightarrow P = 0.3105$$