

תרגילים שונים באינדוקציה מתמטית

מס'1

הוכח בעזרת אינדוקציה מתמטית ש :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \text{(א)}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \quad \text{(ב)}$$

$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + (2n-1) \cdot 2n = \frac{1}{3}n(n+1)(4n-1) \quad \text{(ג)}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \text{(ד)}$$

$$\frac{2}{2 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 8} + \frac{2}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{2}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{3n+2} \quad \text{(ה)}$$

$$2 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 9 + \dots + (3n-1) \cdot 3^{n-1} = \frac{1}{4}[3^n(6n-5)+5] \quad \text{(ו)}$$

$$(n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + \dots + (2n-1)^2 + (2n)^2 = \frac{1}{6}n(2n+1)(7n+1) \quad \text{(ז)}$$

$$\frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} + \frac{1}{(n+2) \cdot (n+3)} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{2n} \quad \text{(ח)}$$

מס'2

הוכח בעזרת אינדוקציה מתמטית ש :

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 - \frac{1}{n} \quad \text{(א)}$$

$$(n \geq 2) , \quad \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24} \quad \text{(ב)}$$

$$(n \geq 3) , \quad (n+1)^n < n^{n+1} \quad \text{(ג)}$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n} \quad \text{(ד)}$$

$$(-1 < a \neq 0) , \quad (n \geq 2) , \quad (1+a)^n > 1+an \quad \text{(ה)}$$

מס'3

נתונה הסדרה: $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1 \end{cases}$. הוכח כי $a_n = n^2 + 1$.

מס'4

נתונה הסדרה: $\begin{cases} a_1 = 13 \\ a_{n+1} = 3a_n + 10 \end{cases}$. הוכח כי $a_n = 2 \cdot 3^{n+1} - 5$.

מס'5

הוכח באינדוקציה כי החל מ- n מסוים מתקיים האי-שוויון.

$$\begin{cases} a_1 = -4 \\ a_{n+1} = \frac{a_n + 10}{3} \end{cases} \Rightarrow 4 \leq a_n < 5 \quad \text{(ב)}, \quad \begin{cases} a_1 = 9 \\ a_{n+1} = \frac{a_n + 5}{2} \end{cases} \Rightarrow 5 < a_n \leq 6 \quad \text{(א)}$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{5 - a_n}{5 + 3a_n} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{9}{13} \quad \text{(ד)}, \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{3 - a_n}{5 + a_n} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3} \leq a_n \leq \frac{1}{2} \quad \text{(ג)}$$

מס'6

נתונה הסדרה: $\begin{cases} a_1 = 2 ; a_2 = 3 \\ a_{n+2} = -2a_n + 3a_{n+1} \end{cases}$. הוכח כי $a_n = 2^{n-1} + 1$.

מס'7

נתונה הסדרה: $\begin{cases} a_1 = 2 ; a_2 = 3 \\ a_{n+2} = -9a_n + 6a_{n+1} \end{cases}$. הוכח כי $a_n = 3^{n-1}(3 - n)$.

מס'8

נתונה הסדרה: $\begin{cases} a_1 = a_2 = 3 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \end{cases}$. הוכח כי $a_n = 2^n - (-1)^n$.

מס'9

הוכח את הטענות הבאות:

(א) לכל n טבעי מתקיים: $6 \mid n^3 - n$.

(ב) לכל n טבעי מתקיים: $30 \mid n^5 - n$.

(ג) לכל n טבעי מתקיים: $8 \mid 9^n + 7$.

(ד) לכל n טבעי מתקיים: $36 \mid 7^{n+1} - 6n - 7$.

(ה) לכל n טבעי מתקיים: $7 \mid 5^n + 6 \cdot 2^n$.

מס'10

הוכח כי לכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + \dots + (2n-3)^2 - (2n-1)^2 = -2n^2$$

מס'11

הוכח כי לכל n טבעי אי-זוגי מתקיים:

$$31 \mid 2^{2n} + 3^{3n}$$