

שתי שאלות באינדוקציה

שאלה 1

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} > \frac{n}{4}$$

הוכח את אי-השוויון :

פתרון:

נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$:

$$\frac{1^2}{3} > \frac{1}{4}$$

הטענה נכונה עבור $n=1$.

נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו:

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} > \frac{k}{4}$$

נוכיח את נכונות הטענה עבור $n=k+1$:

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} > \frac{k+1}{4}$$

הוכחה:

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} > \frac{k+1}{4}$$

נחליף את הקטע המסומן בהנחת האינדוקציה ולכן נותר להוכיח כי:

$$\frac{k}{4} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} \geq \frac{k+1}{4}$$

$$\frac{k(2k+1)(2k+3) + 4(k^2 + 2k + 1)}{4(2k+1)(2k+3)} \geq \frac{k+1}{4}$$

$$\frac{k(4k^2 + 8k + 3) + 4(k^2 + 2k + 1)}{4(2k+1)(2k+3)} \geq \frac{k+1}{4}$$

$$\frac{4k^3 + 8k^2 + 3k + 4k^2 + 8k + 4}{4(2k+1)(2k+3)} \geq \frac{k+1}{4}$$

$$4[4k^3 + 12k^2 + 11k + 4] \geq 4(k+1)(2k+1)(2k+3)$$

$$16k^3 + 48k^2 + 44k + 16 \geq (4k+4)(4k^2 + 8k + 3)$$

$$16k^3 + 48k^2 + 44k + 16 \geq 16k^3 + 32k^2 + 12k + 16^2 + 32k + 12$$

$$4 \geq 0$$

משפט סיכום:

בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$. הנחנו את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו והוכחנו את נכונות הטענה עבור $n=k+1$. לכן, עפ"י אקסיומת האינדוקציה המורחבת, הטענה נכונה לכל n החל מ- $n=1$.

שאלה 2

$$(1 \cdot 2 + 2) + (2 \cdot 1 + 2) + (3 \cdot 0 + 2) + \dots [n(3-n) + 2] = \frac{n(n+2)(5-n)}{3} \quad \text{הוכח באינדוקציה:}$$

פתרון:

א. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$:

$$1 \cdot 2 + 2 = \frac{1 \cdot 8 \cdot 4}{3}$$

$$4 = 4$$

הטענה נכונה עבור $n=1$.

נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו:

$$(1 \cdot 2 + 2) + (2 \cdot 1 + 2) + (3 \cdot 0 + 2) + \dots [k(3-k) + 2] = \frac{k(k+2)(5-k)}{3}$$

נוכיח את נכונות הטענה עבור $n=k+1$:

$$(1 \cdot 2 + 2) + (2 \cdot 1 + 2) + (3 \cdot 0 + 2) + \dots [(k+1)(3 - (n+1)) + 2] = \frac{(k+1)(k+3)(5 - (k+1))}{3}$$

הוכחה:

$$\underline{(1 \cdot 2 + 2) + (2 \cdot 1 + 2) + (3 \cdot 0 + 2) + \dots [k(3 - k) + 2] + [(k+1)(2 - k) + 2]} = \frac{(k+1)(k+3)(4 - k)}{3}$$

נחליף את הקטע המסומן בהנחת האינדוקציה ולכן נותר להוכיח כי:

$$\frac{k(k+2)(5-k)}{3} + [(k+1)(2-k) + 2] = \frac{(k+1)(k+3)(4-k)}{3} \quad / \cdot 3$$

$$(k^2 + 2k)(5 - k) + 3(k+1)(2 - k) + 6 = (k^2 + 4k + 3)(4 - k)$$

$$5k^2 + 10k - k^3 - 2k^2 + 6k - 3k^2 + 6 - 3 + 6 = 4k^2 + 16k + 12 - k^3 - 4k^2 - 3k$$

$$-k^3 + 13k + 12 = -k^3 + 13k + 12$$

משפט סיכום:

בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$. הנחנו את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו

והוכחנו את נכונות הטענה עבור $n=k+1$. לכן, עפ"י אקסיומת האינדוקציה המורחבת,

הטענה נכונה לכל n החל מ- $n=1$.