

שאלה

הוכח באמצעות אינדוקציה מתמטית כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1*2-2*3+3*4-...+(-1)^{n+1}*n(n+1)=[(-1)^{n+1}(2n^2+4n+1)+1]/4$$

פתרון חלקי (שלב המעבר):

נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$, כלומר:

$$1*2-2*3+3*4-...+(-1)^{k+1}*k(k+1)=[(-1)^{k+1}(2k^2+4k+1)+1]/4$$

ונוכיח עבור $n=k+1$ (נצא מצד אחד ונגיע לצד השני):

$$1*2-2*3+3*4-...+(-1)^{k+1}*k(k+1)+(-1)^{k+2}*(k+1)(k+2)=$$

$$[(-1)^{k+2}(2(k+1)^2+4(k+1)+1)+1]/4=[(-1)^{k+2}(2k^2+4k+2+4k+4+1)+1]/4=$$

$$=[(-1)^{k+2}(2k^2+8k+7)+1]/4$$

נשתמש בהנחת האינדוקציה:

$$1*2-2*3+3*4-...+(-1)^{k+1}*k(k+1)+(-1)^{k+2}*(k+1)(k+2)=$$

נחליף את החלק המודגש בהנחה ונקבל:

$$[(-1)^{k+1}(2k^2+4k+1)+1]/4+(-1)^{k+2}(k+1)(k+2)=$$

נוציא את ה- $(-1)^{k+2}$ (כמו בתשובה שצריך להגיע), נעשה מכנה משותף ונקבל:

$$(-1)^{k+1}=-(-1)^{k+2}$$

$$=\{[(-1)^{k+2}[4(k+1)(k+2)-(2k^2+4k+1)]]+1\}/4=$$

$$=[(-1)^{k+2}(4k^2+4k+8k+8-2k^2-4k-1)+1]/4=$$

$$=[(-1)^{k+2}(2k^2+8k+7)+1]/4$$

זה בדיוק הביטוי שהיינו צריכים להגיע אליו.