

דוגמא 2: אינדוקציות על סכומים

בהוכחות מסוג זה, צריך להראות שסכום של סדרה מסוימת שווה לביטוי כלשהו.

טענה
לכל n , סכומם של כל המספרים הטבעיים עד n נתון באמצעות הנוסחה: $\frac{n(n+1)}{2}$

כלומר, מדובר על סכום המספרים הטבעיים מ-1 עד n . (מספרים על המתמטיקאי הדגול גאוס שעוד בילדותו מצא נוסחא זו בעודו בבית הספר).

הוכחה: עלינו להוכיח שמתקיים: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

- **שלב א:** בסיס האינדוקציה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n = 1$:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1, \text{ כלומר קיבלנו ש } 1 = 1 \Leftarrow \text{הטענה נכונה עבור } n = 1.$$

- **שלב ב:** הנחת האינדוקציה: נניח את נכונות הטענה עבור $n = k$, כלומר נניח שמתקיים

$$1 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \text{ עד ל-} k \text{ מסויים.}$$

- **שלב ג:** צעד האינדוקציה: נוכיח עבור $n = k + 1$. במילים אחרות, עלינו להוכיח שמתקיים:

$$1 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

כעת: ניעזר בהנחת האינדוקציה, ונכתוב:

$$1 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1), \text{ כלומר למעשה עלינו להוכיח}$$

$$\text{שמתקיים: } \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad \star \text{ אם } \star \text{ נכונה, הרי שמתקיים גם:}$$

$$\star \star \quad k(k+1) + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$$

$$\text{וכן נשים לב שמתקיים: } (k+1)(k+2) = k(k+1) + 2(k+1),$$

לכן מ- $k(k+1) + 2(k+1) = k(k+1) + 2(k+1)$ נקבל: $k(k+1) + 2(k+1) = k(k+1) + 2(k+1)$.

וקיבלנו שוויון. מכאן:

מסקנה: בדקנו נכונות הטענה ל- $n=1$, ומההנחה של נכונותה עבור $n=k$ טבעי מסוים הוכחנו את נכונותה עבור $n=k+1$, ולכן על פי משפט האינדוקציה השלמה הטענה נכונה לכל מספר טבעי.

הערה: הוכחנו טענה בסיסית שתעזור לנו בהוכחות יותר מורכבות, שבהן נוכל להשתמש בה בלי לנמק איך הגענו אליה. הרעיון שמאחורי הוכחות כאלו הוא:

1. לנסח את מה שצריך להוכיח כנכון.
2. לסמן את הנחת האינדוקציה ולהציב אותה בשלב האינדוקציה(המעבר- לעיתים יותר מפעם אחת!).
3. לבצע מספר פעולות חשבוניות עד לקבלת התוצאה המיוחלת.

יש לשים לב שמותר ואף רצוי לעיתים לנצל את הנחת האינדוקציה כמה פעמים.