# פרוק לשברים יסודיים

קיים משפט במתמטיקה שאומר שכל ביטוי רציונאלי (פולינום חלקי פולינום) אפשר לפרק לסכום של שברים יסודיים. כל שבר יסודי הוא מאחת מ-4 הצורות הבאות הבאה:

$$1)\ \frac{k}{ax+b}$$

$$2)\ \frac{k}{(ax+b)^n}$$

$$3)\ \frac{kx+l}{ax^2+bx+c}$$

$$4)\ \frac{kx+l}{(ax^2+bx+c)^n}$$

כאשר המכנה הוא ביטוי ריבועי, אזי מתקיים בו $\Delta > 0$, כלומר לא ניתן לפרק אותו לגורמים.

נראה פרוק לשברים יסודיים באמצעות דוגמא. נפרק את השבר $\frac{2x-1}{(x+1)(x-2)}$ לשברים יסודיים.

נסתכל על המכנה שלו, ונחשוב כיצד יכלו להגיע אליו כשעשו "מכנה משותף" בחיבור. המכנים הם $x+1, x-2$. לכן יהיו לנו שני שברים יסודיים מצורה 1.

$$\frac{2x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}$$

ננסה למצוא a ו-b מתאימים. לפני כן, נפשט מעט את המשוואה על ידי כפל במכנה משותף:

$$2x - 1 = a(x-2) + b(x+1)$$

הביטוי צריך להיות נכון לכל x, בפרט עבור x=2. אם נציב x=2 נקבל:

$$4 - 1 = a \cdot (2-2) + b(2+1)$$

$$3 = 3b \Rightarrow b = 1$$

כמו כן, הביטוי נכון גם עבור x=-1. נציב x=-1 ונקבל:

$$-2 - 1 = a \cdot (-1-2) + 1 \cdot (-1-1)$$

$$-3 = -3a \Rightarrow a = 1$$

בסופו של דבר קיבלנו ש:

$$\frac{2x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2}$$

# שימושים של פרוק לשברים יסודיים

דוגמא 1:
הוכח באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי:

$$\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{(n-1)(n-2)}+\frac{1}{n(n-1)}=1-\frac{1}{n}$$

הפעם נבחר ב"דרך אחרת". נפרק את האיבר הכללי של הסדרה, $\frac{1}{n(n-1)}$, לשברים יסודיים. נחסוך מכם את החישובים:

$$\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

וכעת נכתוב את הסכום שלנו באמצעות השברים היסודיים:

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}$$

ניתן לראות כי כל האיברים הצטמצמו חוץ משני הקיצוניים. מש"ל :-)

דוגמא 2: (ינואר 1992, שאלה 2, סעיף א', 5 יח')
הוכח באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי:

$$\frac{1}{(2\cdot 1-1)(2\cdot 1+1)}+\frac{1}{(2\cdot 2-1)(2\cdot 2+1)}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

הוכחה:
נעשה בדיוק את אותו התהליך (נחסוך מכם את החישוב):

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{0.5}{2n-1}-\frac{0.5}{2n+1}$$

כעת נכתוב את הסכום שלנו באמצעות השברים היסודיים:

$$\left(\frac{0.5}{2\cdot 1-1}-\frac{0.5}{2\cdot 1+1}\right)+\left(\frac{0.5}{2\cdot 2-1}-\frac{0.5}{2\cdot 2+1}\right)+\ldots+\left(\frac{0.5}{2n-1}-\frac{0.5}{2n+1}\right)=$$

$$0.5\cdot\left[\left(\frac{1}{2\cdot 1-1}-\frac{1}{2\cdot 1+1}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 2-1}-\frac{1}{2\cdot 2+1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=$$

$$0.5\cdot\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\ldots.+\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=0.5\cdot\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=$$

$$0.5\cdot\left(\frac{2n+1-1}{2n+1}\right)=0.5\cdot\left(\frac{2n}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$$

והנה עוד פלא, הכל הצטמצם חוץ מהקצוות. מש"ל :-)