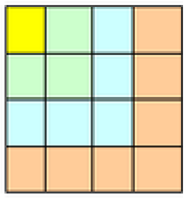
אינדוקציה מתמטית-הקדמה והיסטוריה

אינדוקציה מתמטית היא שיטה לוגית המאפשרת להוכיח שתכונה מסוימת משותפת לכל המספרים הטבעיים. האינדוקציה מורכבת משני טיעונים: ראשית, שהמספר 1 מקיים את התכונה, ושנית, שאם מספר טבעי n מקיים אותה, אז גם המספר n+1 מקיים אותה. גמישותה של שיטת האינדוקציה הפכה אותה לאחד מכלי ההוכחה החזקים ביותר בארגז הכלים של כל מתמטיקאי.

היסטוריה

את המונח "אינדוקציה מתמטית" הציע הלוגיקן אוגוסטוס דה-מורגן, כשכתב את הערך "אינדוקציה (מתמטיקה)" באנציקלופדיית פני ב-1838, אך השיטה עצמה הופיעה אצל מחברים רבים קודם לכן. בלז פסקל עסק במשולש פסקל, המוגדר במונחים קומבינטוריים, והוכיח תכונות יסוד שלו, כמו העובדה שכל מקדם שווה לסכום שני המקדמים שמעליו במשולש. אצל פסקל, ב-1654, הופיעה האינדוקציה לראשונה, באופן מפורש ובסגנון מודרני. ההיסטוריון של המתמטיקה פלוריאן קג'ורי מצא סימנים של הוכחות עם טיעון חוזר, המזכירות את שלבי האינדוקציה הראשונים כבר אצל Campanus (1260) ואצל פרוקלוס (Proclus) (410-485), אבל סיכם שהוכחות אלו "אינן אינדוקציה".

$$1 = 1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$



<u>הדגמת הטענה</u> "סכומם של n המספרים האי-זוגיים הראשונים הוא המספר הריבועי העומד במקום n".

ג'אורג קנטור, ב-1902, מייחס את שיטתו של פסקל למאורוליצוס (Maurolycus), שספרו "אריתמטיקה" פורסם ב-1575. מאורוליצוס בנה בספר טבלאות של מספרים "מיוחדים", כגון זוגיים, אי-זוגיים, משולשיים וריבועיים, והבחין בתכונות שונות שלהן. לאחר שהוכיח את טענה XIII בספר, ש"כל ריבוע שמוסיפים לו את המספר האי-זוגי הבא שווה לריבוע הבא", היינו, $n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$, הוא הוכיח את הטענה ה-XV: "סכומם של n המספרים האי-זוגיים הראשונים הוא המספר הריבועי העומד במקום n" (בלשון מודרנית, $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$), כך: "המספר הריבועי הראשון, כשהוא נוסף למספר האי-זוגי הבא, נותן את הריבוע הבא (4); והמספר הריבועי השני, כשהוא נוסף למספר האי-זוגי הבא (5), נותן את הריבוע השלישי (9); וכך, המספר הריבועי השלישי, כשהוא נוסף למספר האי-זוגי הרביעי (7),

נותן את המספר הריבועי הרביעי (16); וכך באופן עוקב עד אינסוף הטענה מוכחת באמצעות הפעלה חוזרת של טענה XIII".

מבנה ההוכחה

מבנה ההוכחה באינדוקציה תמיד זהה:

1) בדיקה למקרה $n=1$.

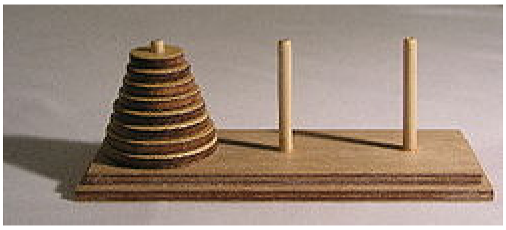
2) הנחה עבור n טבעי מסוים .

3) הוכחה שמההנחה נובעת נכונות הטענה עבור $n+1$.

בין השגיאות הנפוצות בהוכחות באינדוקציה: הוכחת צעד האינדוקציה ללא הבסיס (צעד האינדוקציה תקף באופן ריק גם לתכונות שאף מספר אינו מקיים), או הוכחת צעד האינדוקציה עבור $n>2$ בלבד (כפי שמדגים פרדוקס הסוסים שנציג בהמשך). הנוסח המתאר את צעד האינדוקציה בספרים אחדים "נניח שהוכחנו את הטענה עבור n, ונוכיח אותה עבור $n+1$", פגום : אם הוכחנו את הטענה עבור n כללי, אין עוד צורך להוכיח דבר; ואם כך, ניסוח זה של צעד האינדוקציה נכון באופן ריק, ולא ניתן להסיק ממנו דבר.

דוגמאות

דוגמה 1



מגדלי האנוי

מגדלי האנוי הינה חידה פופולארית (מתמטיקה-רקורסיה, מחשבים-אלגוריתמטיקה וכו'..) שבה יש להעביר מגדל של דסקיות מעמוד אחד לעמוד אחר, תוך שימוש בעמוד עזר ועל פי החוקים הבאים:

- בכל תור מותר להזיז דסקית אחת בלבד, מראש עמוד אחד לראש עמוד אחר.
- אסור להניח דסקית גדולה על גבי דסקית קטנה ממנה.

ניתן להוכיח באינדוקציה שניתן לפתור את החידה, לא משנה כמה דסקיות יש במגדל. כמובן שניתן לפתור את החידה עבור מגדל בעל דסקית אחת בלבד, בעזרת מהלך אחד. עתה נניח שניתן להעביר מגדל בעל n דסקיות ונראה שניתן להעביר מגדל בעל n+1 דסקיות. ההעברה מתבצעת בשלושה שלבים. ראשית נעביר את n הדסקיות העליונות אל עמוד העזר - דבר שניתן לעשות על פי הנחת האינדוקציה, שנית נעביר את הדסקית התחתונה - ולבסוף נעביר שוב את n הדסקיות שעל עמוד העזר אל מעל לדסקית התחתונה.

דוגמה 2

ישנן גם הוכחות שקריות המבוססות על אינדוקציה, הוכחות שנראות לכאורה כפרדוקסים, אך למעשה מכילים טעות קטנה. כך לדוגמה פרדוקס הסוסים מתיימר להוכיח באינדוקציה שכל הסוסים בעולם באותו צבע: נוכיח שעבור כל קבוצה של n סוסים הם כולם מאותו הצבע. כמובן שעבור n=1 יש רק סוס אחד ולכן המשפט מתקיים. עתה נניח שהמשפט נכון עבור n סוסים ונוכיח את המקרה לקבוצה בעלת n+1 סוסים. לשם כך ניקח את אחד מהסוסים בקבוצה הגדולה ונשים אותו בצד. אזי נותרו n סוסים, ועל פי הנחת האינדוקציה הם כולם מאותו הצבע. עתה נחזיר את הסוס הבודד לקבוצה ונשים בצד את אחד הסוסים האחרים. שוב על פי הנחת האינדוקציה בקבוצה שנותרה כל הסוסים מאותו הצבע, ומכאן שגם הסוס שהותרנו בצד בשלב הראשון הוא באותו הצבע כמו כל יתר הסוסים. מכאן ששלב האינדוקציה מתקיים.

הטעות בהוכחה זאת היא שהוכחת שלב האינדוקציה אכן תקפה לגבי כל n, למעט המקרה של n=2.

חשיבות ההוכחה באינדוקציה של טענה כללית

הוכחה באינדוקציה הינו כלי בעל חשיבות רבה מאוד במתמטיקה. הוא בא לידי ביטוי במקרים רבים שבהם אנו נדרשים להוכיח נכונות של טענות המנוסחות בעזרת מספרים טבעיים. במקרים רבים כאלה הדרך הקלה היא שימוש באינדוקציה מתמטית. אינדוקציה היא לא צורת חשיבה אינטואיטיבית למרבית האנשים ולכן יש מקום להסבר קצר. נהוג להסביר אינדוקציה באמצעות מבנה דומינו. כידוע, כאשר מסדרים קוביות דומינו בשורה, הפלה של הקובייה הראשונה גורמת לנפילת הקובייה הבאה וכן הלאה עד אשר כל שאר הקוביות נפלו. עקרון האינדוקציה מזכיר זאת במידה רבה. כל קוביית דומינו מפילה את הקובייה שבאה אחריה וזו מפילה את זו שאחריה וכו'.. ולכן מספיק להפיל את הראשונה ושכל אחת תפיל את הבאה בתור על מנת שלבסוף כל הקוביות יפלו. הבא נתבונן על אינדוקציה בדומינו. נניח שישנה שורה של קוביות דומינו. ידוע שאם קובייה נופלת, היא מפילה את כל השאר. אם מישהו בוחר להפיל את הקובייה הראשונה, אז אנו יודעים (באינדוקציה) שכל שאר הקוביות יפלו (אילו בחר איש זה להפיל את

הקובייה השנייה, כל הקוביות היו נופלות פרט לראשונה). הפלת הקובייה הראשונה נקראת **בסיס האינדוקציה** ואילו העובדה שכל קובייה מפילה את הבאה אם היא בעצמה נופלת, היא **שלב האינדוקציה**. הטענה "קובייה מסוימת נפלה" תקרא **הנחת האינדוקציה** - כלומר, אנו מניחים שקובייה מסוימת נפלה ובודקים אם זו שבאה אחריה גם תיפול כתוצאה מזה. אם באמת נפילה של קובייה גורמת **תמיד** לנפילת הקובייה הבאה בתור והקובייה הראשונה נפלה, אז כל הקוביות יפלו. לאחר שהבנו זאת, נתבונן על עקרון **ההוכחה** באינדוקציה. בהוכחות באינדוקציה, ישנו מבנה קבוע ומוגדר מראש שצריך לעקוב אחריו. מבנה זה עשוי לעזור להבין אינטואיטיבית את ההוכחה, מקל על הבנתה והוא אף **הכרחי** על מנת שההוכחה תהיה קבילה כהוכחה מתמטית. בהוכחה באינדוקציה אין להשמיט אף אחד מהשלבים הללו. חוסר דיוק בהוכחות באינדוקציה עלול לאפשר לנו "להוכיח" טענות שאינן כלל נכונות או שהן טענות חסרות כל משמעות (כמו למשל הטענה "כל מספר טבעי הוא מעניין").