

דוגמא לפתרון שאלה ע"י אינדוקציה

צ"ל שלכל n טבעי נכונה הנוסחה:

$$1*2 + 2*3 + 3*4 + \dots + n(n+1) = 1/3*n(n+1)(n+2)$$

פתרון:

(1) בדיקת הטענה עבור $n=1$:

נבדוק זאת ע"י הצבה של $n=1$ בשני האגפים:

אגף שמאל: נציב תחילה $n=1$ בביטוי האחרון

$$n(n+1) = 1(1+1) = 1*2 = 2$$

ולכן הסכום שבאגף שמאל הוא בעצם $1*2=2$.

$$1/3*1(1+1)(1+2) = 1/3*1*2*3 = 2 \quad \text{אגף ימין: נציב } n=1 \text{ ונקבל:}$$

$=$ אגף שמאל $=$ אגף ימין $= 2$, ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

(2) נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$ (טבעי) מסוים:

$$1*2 + 2*3 + 3*4 + \dots + k(k+1) = 1/3*k(k+1)(k+2) \quad \text{כלומר מתקיים:}$$

(3) צריך להוכיח את הטענה עבור $n=k+1$:

תחילה נרשום מה שאנו צריכים להוכיח:

$$1*2 + 2*3 + 3*4 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = 1/3*(k+1)(k+2)(k+3)$$

נצא מהביטוי באגף שמאל ונגיע לביטוי באגף ימין:

$$1*2 + 2*3 + 3*4 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2)$$

ע"פ ההנחה של שלב (2) המרנו
אגף שמאל באגף ימין.

$$= 1/3*k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)$$

הוצאת גורמים משותפים.

$$= 1/3*[k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)]$$

$$= 1/3*(k+1)(k+2)[k+3]$$

$$=1/3*(k+1)(k+2)(k+3)$$

והגענו לאגף ימין.

סיכום: בדקנו קיום הטענה לגבי $n=1$, והוכחנו מקיומה עבור n טבעי מסוים היא מתקיימת גם לגבי העוקב שלו $n+1$, ולכן ע"פ אקסיומת האינדוקציה השלמה הצלחנו להוכיח את הטענה.

מ.ש.ל