

הקדמה:

במדעים השונים ובמתמטיקה בפרט משמשות בין היתר שתי שיטות חשיבה: **דדוקציה ואינדוקציה**, כאשר דדוקציה מהווה מעבר מהמקרה הכללי לפרטי בעוד שאינדוקציה מהווה מעבר מהמקרה הפרטי לכללי. באינדוקציה מסיקים מסקנה כללית על סמך שורה של תוצאות חלקיות או עובדות בודדות.

ישנן שתי שיטות אינדוקציה: האינדוקציה השלמה והאינדוקציה החלקית (לא שלמה), כאשר האינדוקציה השלמה היא הפשוטה ביותר.

באינדוקציה זו הטענה הכללית מתקבלת ע"י בדיקת כל המקרים הפרטיים, כיוון שהרבה פעמים שיטה זו אינה יעילה מאחר ויש לבדוק מספר גדול מאוד של מיקרים (לעיתים אינסוף), נשתמש באינדוקציה החלקית (לא שלמה) בה בודקים מספר מיקרים (לא את כולם) .

האינדוקציה החלקית

תפקידה של אינדוקציה זו הוא לעזור להגיע להכללה ע"י בחינה של מספר מיקרים פרטיים, וכיוון שכך שיטה זו לא מהווה את הוכחת הטענה.

כלומר מאחר והאינדוקציה החלקית מסתמכת על תוצאות חלקיות היא עלולה להביא לתוצאה כללית לא נכונה, לדוגמא:

הטענה שהביטוי $n^2 - n + 11$ הוא מספר ראשוני לכל n טבעי .

נבדוק את שלושת האיברים הראשונים בסדרה:

$$n = 1: 1^2 - 1 + 11 = 11$$

$$n = 2: 2^2 - 2 + 11 = 13$$

$$n = 3: 3^2 - 3 + 11 = 17$$

המס' שהתקבלו הם מס' ראשוניים, גם אם נמשיך לבדוק עבור $n=4,5,...,10$ נקבל שהמספרים המתקבלים הם מספרים ראשוניים, אך עבור $n=11$ נקבל 11^2 שזהו אינו מספר ראשוני.

באופן כללי ניתן לאשר נכונותן של טענות בעזרת אקסיומה הנקראת **אקסיומת האינדוקציה המתמטית** (השלמה):

טענה המתייחסת למספר טבעי n נכונה לכל n אם היא מקיימת את התנאים הבאים:

(1) הטענה נכונה עבור: $n=1$ (או החל מ- n מסוים).

(2) מההנחה שהטענה נכונה עבור , $n=k$, כאשר k מספר טבעי, נובע שהיא נכונה עבור $n=k+1$.

הרעיון הכללי: בודקים את נכונות הטענה עבור $n=1$ ע"י שמציבים 1 במקום n . ואז עפ"י שלב (2) הטענה נכונה עבור $n=2$, שוב עפ"י שלב (2) הטענה נכונה עבור $n=3$ וכן הלאה.

בצורה זו נקבל שהטענה נכונה עבור כל המספרים הטבעיים.

שלבים בהוכחה:

שלב א': בודקים את נכונות הטענה עבור $n=1$ ע"י הצבת 1 במקום n .

שלב ב': מניחים שהטענה נכונה עבור $n=k$, כאשר k הוא מס' טבעי כלשהו. מציבים k במקום n .

שלב ג': זהו השלב בו רושמים את מה שצריך להוכיח , כלומר מציבים את n במקום את $k+1$.

שלב ד': על סמך ההנחה בשלב ב' מוכיחים שהטענה מתקיימת עבור $n=k+1$.

הערה: ניתן להסתמך על האינדוקציה גם על מנת להוכיח שהטענה נכונה עבור $n = p \neq 1$

כלומר, $p > 1$.

לדוגמא: נכונות עבור מספרים זוגיים ואי זוגיים.

דוגמא:

הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי נכונה הנוסחה:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \dots + n(2n-1) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

פתרון: שלב א'- נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$ ע"י הצבת 1 במקום n בשני אגפי השוויון.

אגף שמאל-

$$1(2 \cdot 1 - 1) = 1$$

$$\frac{1(1+1)(4 \cdot 1 - 1)}{6} = 1 \quad \text{אגף ימין-}$$

הטענה נכונה עבור $n = 1$

שלב ב' - נניח כי הטענה נכונה עבור $n = k$:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \dots + k(2k-1) = \frac{k(k+1)(4k-1)}{6}$$

שלב ג' - נוכיח כי הטענה נכונה עבור $n = k+1$:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \dots + (k+1)(2k+1) = \frac{(k+1)(k+2)(4k+3)}{6}$$

שלב ד' - הוכחה:

$$\underbrace{1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \dots + k(2k-1)}_{\frac{k(k+1)(4k-1)}{6}} + (k+1)(2k+1) = \frac{(k+1)(k+2)(4k+3)}{6}$$

$$\frac{k(k+1)(4k-1)}{6} + (k+1)(2k+1) = \frac{(k+1)(k+2)(4k+3)}{6}$$

$$\frac{k(k+1)(4k-1) + 6(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{(k+1)[k(4k-1) + 6(2k+1)]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(4k^2 - k + 12k + 6)}{6} = \frac{(4k^2 + 11k + 6)(k+1)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(4k+3)}{6}$$

וזו בדיוק הביטוי שבאגף ימין.

כללי התחלקות:

כללי התחלקות המתקיימים לגבי מספרים טבעיים: $(a, b, c, d \in \mathbb{N})$

1. אם כל אחד מהמספרים a, b מתחלק ב- c אזי גם הסכום שלהם מתחלק ב- c .
2. אם המספר a מתחלק ב- c והמספר b מתחלק ב- d אזי המכפלה ab מתחלקת ב- cd .
3. אם אחד הגורמים במכפלה מתחלק במספר כלשהו אזי כל המכפלה מתחלקת במספר זה.
4. אם מספר מתחלק גם ב- a וגם ב- b אזי הוא מתחלק במכפלה המשותפת הקטנה ביותר שלהם, בפרט אם a ו- b מספרים זרים, אזי המספר מתחלק ב- ab .

אינדוקציה עם סימנים מתחלפים:

אינדוקציות עם סימנים מתחלפים הן אינדוקציות שבהן האיברים באגף שמאל מופיעים עם סימנים מתחלפים- פעם חיובי ופעם שלילי.

נתבונן ב- $(-1)^n$ עבור n - זוגי נקבל: $(-1)^n = 1$ ועבור n - אי-זוגי נקבל: $(-1)^n = -1$

נתבונן ב- $(-1)^{n+1}$ עבור n - זוגי נקבל: $(-1)^{n+1} = -1$ ועבור n - אי-זוגי נקבל: $(-1)^{n+1} = 1$

כלומר , $\boxed{(-1)^n = -(-1)^{n+1}}$ לכן נשתמש בזהות זו על מנת להוכיח אינדוקציות אילו.