

## עוד שלוש שאלות באינדוקציה

### שאלה 1

נתונה סדרה חשבונית  $2, 5, 8, \dots, a_n, \dots$ . הוכיחו באינדוקציה כי הביטוי  $2 \cdot 3^{a_n} + 3 \cdot 2^{a_{n+1}}$  מתחלק ב-38 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.

### פתרון

עבור  $n=1$  הטענה נכונה:  $a_1 = 2$  ו- $a_{2=5}$ , ולכן  $2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 2^5 = 2 \cdot 9 + 3 \cdot 32 = 114 = 3 \cdot 38$ .  
נניח כי הטענה נכונה עבור  $k$ , כלומר  $2 \cdot 3^{a_k} + 3 \cdot 2^{a_{k+1}}$  מתחלק ב-38 ללא שארית, ונוכיח כי גם  $2 \cdot 3^{a_{k+1}} + 3 \cdot 2^{a_{k+2}}$  מתחלק ב-38 ללא שארית:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot 3^{a_{k+1}} + 3 \cdot 2^{a_{k+2}} = \\ & = 2 \cdot 3^{a_k+3} + 3 \cdot 2^{a_{k+1}+3} = \\ & = 2 \cdot 3^3 \cdot 3^{a_k} + 3 \cdot 2^3 \cdot 2^{a_{k+1}} = \\ & = 54 \cdot 3^{a_k} + 24 \cdot 2^{a_{k+1}} = \\ & = 38 \cdot 3^{a_k} + 16 \cdot 3^{a_k} + 24 \cdot 2^{a_{k+1}} = \\ & = 38 \cdot 3^{a_k} + 8 \cdot (2 \cdot 3^{a_k} + 3 \cdot 2^{a_{k+1}}) \end{aligned}$$

המחבר הראשון מתחלק ב-38 ללא שארית ככפולה של 38, ומחבר השני מתחלק ב-38 על פי הנחת האינדוקציה. לכן הביטוי כולו מתחלק ב-38 ללא שארית.

### שאלה 2

הוכח באינדוקציה (או בדרך אחרת) כי עבור כל  $n$  טבעי גדול מ-1 מתקיים:  
$$1/2^2 + 1/3^2 + \dots + 1/n^2 < (n-1)/n$$

## פתרון

נבדוק את הטענה עבור  $n=2$  באמצעות הצבה:

$$1/2^2 < (2-1)/2$$

$$1/4 < 1/2$$

בהנחה שהטענה נכונה עבור  $n=k$  כלשהו גדול מ-1, נבדוק האם נובעת מכך גם נכונותה עבור  $n=k+1$ .

$$1/2^2 + 1/3^2 + \dots + 1/k^2 < (k-1)/k$$

$$1/2^2 + 1/3^2 + \dots + 1/k^2 + 1/(k+1)^2 <$$

$$< (k-1)/k + 1/(k+1)^2 <$$

$$< (k-1)/k + 1/[k(k+1)] =$$

$$= [ (k-1)(k+1) + 1 ] / [k(k+1)] =$$

$$= k^2 / [k(k+1)] =$$

$$= k / (k+1) =$$

$$= [(k+1) - 1] / (k+1)$$

מ.ש.ל: מנכונות הטענה עבור  $n=k$  נובעת נכונותה עבור  $n=k+1$ .

## שאלה 3

א. הוכיחו באינדוקציה (או בדרך אחרת) כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots - (2n)^2 + (2n+1)^2 = (n+1)(2n+1)$$

ב. מצאו את הסכום:  $17^2 - 18^2 + 19^2 - 20^2 + \dots + 81^2$ .

## פתרון

א. נוכיח את הטענה באינדוקציה. עבור  $n=1$  הטענה היא:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 = (1+1)(2+1)$$

מכיוון ש- $6=6$ , הרי שטענה זו מתקיימת. כעת נניח שהטענה נכונה עבור  $n$  כלשהו,

ונוכיח אותה עבור  $n+1$ :

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots - (2n)^2 + (2n+1)^2 - (2n+2)^2 + (2n+3)^2$$

$$= \{ \text{הנחת האינדוקציה} \}$$

$$(n+1)(2n+1) - (2n+2)^2 + (2n+3)^2 = (n+1)(2n+1) - 4(n+1)^2 + (2n+3)^2$$

$$= \{ \text{הוצאת } n+1 \text{ כגורם משותף לשני המחוברים הראשונים} \}$$

$$(n+1)[2n+1-4n-4] + (2n+3)^2 = -(n+1)[2n+3] + (2n+3)^2$$

$$= \{ \text{הוצאת } 2n+3 \text{ כגורם משותף לשני המחוברים} \}$$

$$[-n-1+2n+3](2n+3) = (n+2)[2(n+1)+1]$$

הראנו אפוא שמתקיים:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots - [2(n+1)]^2 + [2(n+1)+1]^2 = [(n+1)+1][2(n+1)+1]$$

וזו בדיוק הטענה עבור  $n+1$  ובכך תמה ההוכחה באינדוקציה.

ניתן גם להוכיח בדרך אחרת. מתקיים:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots - (2n)^2 + (2n+1)^2 =$$

$$-0^2 + 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \dots - (2n)^2 + (2n+1)^2$$

אם נחליף את סדר המחוברים ונקבץ כל שניים סמוכים, נקבל את הסכום:

$$(1^2 - 0^2) + (3^2 - 2^2) + (5^2 - 4^2) + \dots + [(2n+1)^2 - (2n)^2]$$

נשים לב שכל מחובר הוא מהצורה  $a_k = (2k+1)^2 - (2k)^2$  כאשר  $k = 0, 1, \dots, n$ .

מתקיים:

$$a_k = (2k+1)^2 - (2k)^2 = [(2k+1) - (2k)][(2k+1) + (2k)] = 4k + 1$$

כלומר  $(a_k)$  היא הסדרה החשבונית  $1, 5, 9, \dots, 4n+1$  אשר בה  $n+1$  אברים. לפיכך

הסכום הדרוש הוא סכום סדרה חשבונית זו, דהיינו:

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n = \frac{(1+4n+1)(n+1)}{2} = \frac{2(2n+1)(n+1)}{2} = (n+1)(2n+1)$$

כלומר הראינו כי מתקיים:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots - (2n)^2 + (2n+1)^2 = (n+1)(2n+1)$$

כמו שצריך להוכיח.

ב. לפי סעיף א:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots - 16^2 + 17^2 = (8+1)(17) = 153$$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots - 16^2 + 17^2 - 18^2 + 19^2 - 20^2 + \dots + 81^2 = (20+1)(81) = 1701$$

אם נחסר את המשוואה השנייה מהראשונה נקבל:

$$-18^2 + 19^2 - 20^2 + \dots + 81^2 = 1548$$

נוסיף  $17^2 = 289$  לשני האגפים ונקבל:

$$17^2 - 18^2 + 19^2 - 20^2 + \dots + 81^2 = 1837$$

כנדרש.