

עוד שאלה באינדוקציה

שאלה

א. הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 4n = 2^{-4n} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 8n$$

ב. בהסתמך על סעיף א', מצא את הערך של b במשוואה:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 199}{202 \cdot 204 \cdot 206 \cdot \dots \cdot 400} = 2^{-b}$$

פתרון

א.

(1) נבדוק עבור $n = 1$:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 &\stackrel{?}{=} 2^{-4} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \\ 24 &= 24 \end{aligned}$$

(2) נניח שהטענה נכונה עבור $n = k$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 4k = 2^{-4k} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 8k$$

(3) נוכיח שהטענה נכונה עבור $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 4k \cdot (4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 8k \cdot (8k+2)(8k+4)(8k+6)(8k+8)} &\stackrel{?}{=} \\ &= 2^{-4} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 8k \cdot (8k+2)(8k+4)(8k+6)(8k+8)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 8k \cdot (8k+2)(8k+4)(8k+6)(8k+8)} \end{aligned}$$

צמצמנו לפי הנחת האינדוקציה (2)

$$\begin{aligned} (4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4) &\stackrel{?}{=} 2^{-4} (8k+2)(8k+4)(8k+6)(8k+8) = \\ &= 2^{-4} \cdot [2(4k+1)][2(4k+2)][2(4k+3)][2(4k+4)] \\ &= 2^{-4} \cdot 2^4 (4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4) \\ \frac{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)} &= 2^0 \cdot \frac{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)} \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

לפי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

ב. $b = ?$

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 199}{202 \cdot 204 \cdot 206 \cdot \dots \cdot 400} = 2^{-b}$$

$$400 = 8n \Rightarrow n = 50$$

נציב $n = 50$ בסעיף א' ונקבל:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 200 = 2^{-200} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 400$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 199 \cdot 200}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 200 \cdot 202 \cdot 204 \cdot \dots \cdot 400} \stackrel{\text{לפי סעיף א'}}{=} 2^{-200}$$

$$\begin{aligned} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 199}{202 \cdot 204 \cdot \dots \cdot 400} &= 2^{-200} \\ b &= 200 \end{aligned}$$