

שלוש שאלות בגיאומטריה

שאלה 1

המרובע ABCD הוא מקבילית.

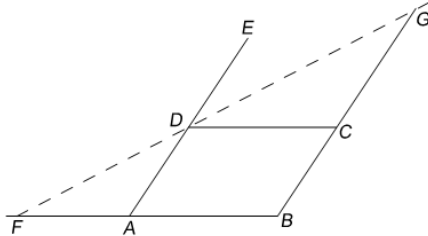
FG הוא חוצה הזווית החיצונית שלה ($\angle EDC$).

הנקודות F ו-G הן נקודות החיתוך של חוצה זווית זה

עם המשכי הצלעות AB ו-BC בהתאמה.

הוכח: א. $BF = BG$

ב. הסכום $BF + BG$ שווה להיקף המקבילית



פתרון:

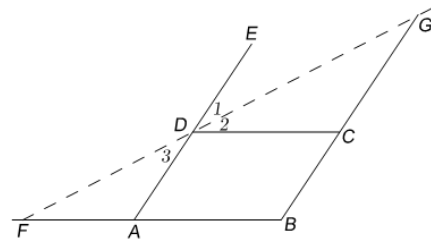
א.

$$AD \parallel BG \Rightarrow (1) \angle D_3 = \angle G$$

$$FB \parallel DC \Rightarrow (1) \angle D_2 = \angle F$$

$$(2) \angle D_1 = \angle D_2, (3) \angle D_1 = \angle D_3$$

$$\Rightarrow \angle D_2 = \angle D_3 \Rightarrow \angle F = \angle G \Rightarrow^{(4)} BF = BG \quad (\checkmark)$$



ב.

$$(5) \angle F = \angle D_3 \Rightarrow^{(4)} AF = AD$$

$$(5) \angle D_2 = \angle G \Rightarrow^{(4)} CD = CG$$

$$BF + BG = (AB + AF) + (BC + CG) \Rightarrow BF + BG = AB + AD + BC + CD \quad (\checkmark)$$

(1) זוויות מתאימות בישרים מקבילים הנחתכים ע"י ישר שלישי - שוות זו לזו

(2) נתון

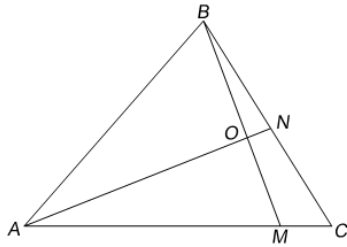
(3) זוויות קודקודיות שוות זו לזו

(4) משולש ששתיים מזוויותיו שוות זו לזו - הוא משולש שווה-שוקיים

(5) ע"פ סעיף א

שאלה 2

במשולש ABC :



הנקודה M נמצאת על הצלע AC כך ש: $AM : MC = 5 : 1$

הנקודה N נמצאת על הצלע BC כך ש: $BN : NC = 10 : 9$

AN ו- BM נחתכים בנקודה O .

הוכח: $BO = \frac{4}{3} \cdot OM$

פתרון:

בנית עזר: $MD \parallel AN$

$$(6) \quad MC = a \Rightarrow^{(2)} AM = 5a, \quad (6) \quad NC = 9b \Rightarrow^{(2)} BN = 10b$$

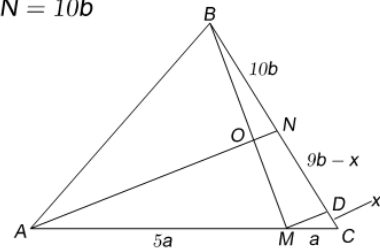
$$(6) \quad CD = x \Rightarrow ND = 9b - x$$

$$MD \parallel AN \Rightarrow (7) \quad \frac{CD}{DN} = \frac{CM}{MA} \Rightarrow \frac{x}{9b-x} = \frac{a}{5a} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 5x = 9b - x \Rightarrow 6x = 9b \Rightarrow x = \frac{9b}{6} = \frac{3b}{2}$$

$$ON \parallel MD \Rightarrow (8) \quad \frac{BN}{ND} = \frac{BO}{OM} \Rightarrow \frac{BO}{OM} = \frac{10b}{9b-x} = \frac{10b}{9b-\frac{3b}{2}} = \frac{10b}{\frac{15b}{2}} = \frac{20}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{BO}{OM} = \frac{4}{3} \Rightarrow BO = \frac{4}{3} \cdot OM \quad (\checkmark)$$



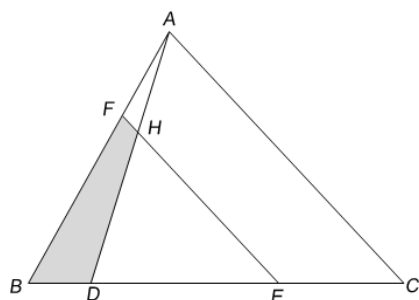
(2) נתון

(6) סימון

(7) משפט תאלס על $\angle C$

(8) משפט תאלס על $\angle MBC$

שאלה 3



הנקודות D ו-E על הצלע BC במשולש ABC,
מחלקות אותה ביחס של $BD : DE : EC = 1 : 3 : 2$.
H היא נקודת החיתוך של AD עם EF.
נתון: $EF \parallel AC$, $S_{AHEC} = 96 \text{ cm}^2$.
חשב את שטח המרובע FBDH.

פתרון:

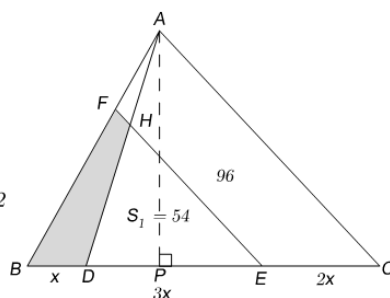
נסמן: $S_{\triangle HDE} = S_1$; $BD = x \Rightarrow DE = 3x, EC = 2x$

$$(1) HE \parallel AC \Rightarrow (2) \triangle HDE \sim \triangle ADC$$

$$\Rightarrow (3) \frac{S_{\triangle HDE}}{S_{\triangle ADC}} = \left(\frac{DE}{DC}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_1 + 96} = \left(\frac{3x}{3x + 2x}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow 25 S_1 = 9 S_1 + 864 \Rightarrow 16 S_1 = 864 \Rightarrow S_1 = 54 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow S_{ADC} = 96 + 54 = 150 \text{ cm}^2$$



הגובה להמשך הבסיס BD של משולש ABD (h = AP) הוא גם הגובה לבסיס DC במשולש ADC,

ולכן היחס בין שטחי שני המשולשים שווה ליחס שבין אותם בסיסים:

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABD}}{150} = \frac{x}{5x} = \frac{1}{5} \Rightarrow S_{\triangle ABD} = 30 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADC} + S_{\triangle ABD} = 150 + 30 = 180 \text{ cm}^2$$

$$(1) FE \parallel AC \Rightarrow (2) \triangle FBE \sim \triangle ABC$$

$$\Rightarrow (3) \frac{S_{\triangle FBE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{BE}{BC}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{\triangle FBE}}{180} = \left(\frac{4x}{6x}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle FBE} = \frac{180 \cdot 4}{9} = 80 \text{ cm}^2 \Rightarrow S_{FBDH} = S_{\triangle FBE} - S_{\triangle HDE} = 80 - 54 \Rightarrow S_{FBDH} = 26 \text{ cm}^2$$

(1) נתון (2) משפט תאלס

(3) יחס שטחי משולשים דומים שווה לריבוע יחס צלעותיהם