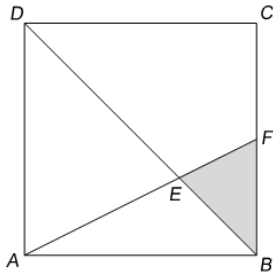


ארבע שאלות בגיאומטריה

שאלה 1



ABCD הוא ריבוע. F היא אמצע הצלע BC.

נתון: $S_{CDEF} = 45 \text{ cm}^2$

חשב את שטח המשולש BEF.

פתרון:

נסמן: $S_{\triangle BEF} = x$, $S_{\triangle AED} = y$, $S_{\triangle ABE} = z$

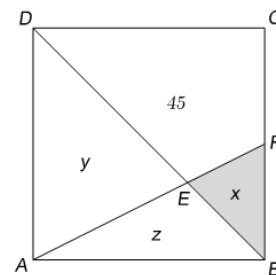
(1) $AD \parallel BF \Rightarrow^{(2)} \triangle AED \sim \triangle FEB$

(3) $\frac{AD}{FB} = 2 \Rightarrow^{(4)} \frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle FEB}} = 2^2 = 4 \Rightarrow \underline{(I) y = 4x}$

(5) $S_{\triangle BDC} = S_{\triangle BDA} \Rightarrow \underline{(II) 45 + x = y + z}$

$S_{\triangle FBA} = \frac{FB \cdot AB}{2}$, $S_{\triangle ADB} = \frac{AD \cdot AB}{2} = \frac{2 \cdot FB \cdot AB}{2} = 2 \cdot \frac{FB \cdot AB}{2}$

$\Rightarrow S_{\triangle ADB} = 2 S_{\triangle FBA} \Rightarrow \underline{(III) y + z = 2(x + z)}$



(II) $45 + x = y + z = 4x + z \Rightarrow 3x + z = 45$

(III) $2x + 2z = y + z \Rightarrow 2x + 2z = 4x + z \Rightarrow z = 2x$

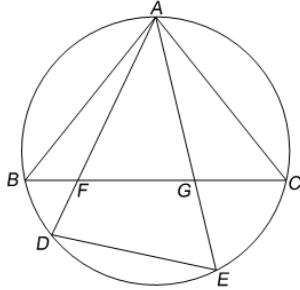
(II) $3x + z = 45 \Rightarrow 3x + 2x = 45 \Rightarrow 5x = 45 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow S_{\triangle BEF} = 9 \text{ cm}^2$

(1) צלעות ריבוע מקבילות זו לזו (2) משפט תאלס (3) נתון

(4) היחס בין שטחי משולשים דומים שווה לריבוע יחס צלעותיהם

(5) כל אחת מהמשולשים הוא חצי ריבוע

שאלה 2



ABC הוא משולש שווה-שוקיים ($AB = AC$) החסום במעגל.

דרך קודקוד זווית הראש A

מעבירים שני מיתרים AD ו- AE

החותכים את בסיס המשולש BC

בנקודות F ו- G בהתאמה.

הוכח: המרובע $DEGF$ הוא בר-חסימה במעגל.

פתרון:

תנאי מספיק שמרובע הינו בר-חסימה במעגל הוא שסכום זוג זוויות נגדיות שלו שווה ל- 180° .

לכן: מספיק להוכיח: $\angle ADE + \angle EGD = 180^\circ$. בנית עזר: CD .

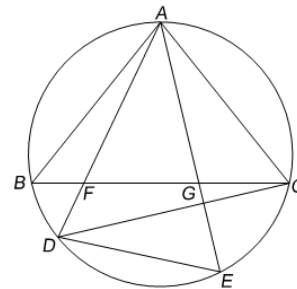
$$\angle EGC \stackrel{(6)}{=} \angle CAE + \angle ACB$$

$$\triangle ADC \stackrel{(7)}{=} \angle ABC \stackrel{(8)}{=} \angle ACB$$

$$\angle CAE \stackrel{(7)}{=} \angle EDC$$

$$\underline{\angle ADE} = \angle ADC + \angle EDC = \angle ACB + \angle CAE = \underline{\angle EGC}$$

$$\underline{\angle EGC} + \underline{\angle EGB} \stackrel{(9)}{=} 180^\circ \Rightarrow \underline{\angle ADE} + \underline{\angle EGB} = 180^\circ \quad (\checkmark)$$



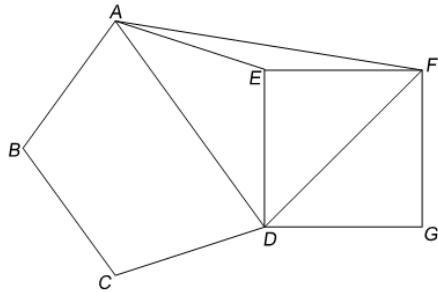
(6) זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות שאינן צמודות לה ($\triangle AGC$)

(7) זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת - שוות זו לזו ($AB = AC$: נתון)

(8) זוויות בסיס במשולש שווה-שוקיים - שוות זו לזו

(9) סכום זוויות צמודות שווה 180° (זווית שטוחה)

שאלה 3



$ABCDE$ הוא מחומש משוכלל, ו- $DEFG$ הוא ריבוע.

א. חשב את הזווית $\angle EFA$.

ב. חשב את הזווית $\angle DAF$.

ג. הוכח: $ABCD$ הוא טרפז שווה-שוקים.

ד. הראה כי הנקודות A , D ו- F

נמצאות על מעגל אחד שמרכזו הוא הנקודה E .

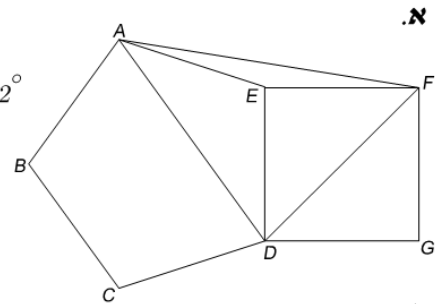
פתרון:

$$(1) \angle AED = \frac{180^\circ (n-2)}{n} = \frac{180^\circ \cdot 3}{5} = 108^\circ$$

$$(2) \angle DEF = 90^\circ \Rightarrow \angle AEF = 360^\circ - (108^\circ + 90^\circ) = 162^\circ$$

$$(3) EA = EF \Rightarrow^{(4)} \angle EAF = \angle EFA = \frac{180^\circ - 162^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow \angle EAF = \angle EFA = 9^\circ$$



א.

ב.

$$(3) EA = ED, (5) \angle AED = 108^\circ \Rightarrow^{(6)} \angle DAE = \angle ADE = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$$

$$\angle DAF = \angle DAE + \angle EAF = 36^\circ + 9^\circ \Rightarrow \angle DAF = 45^\circ$$

ג.

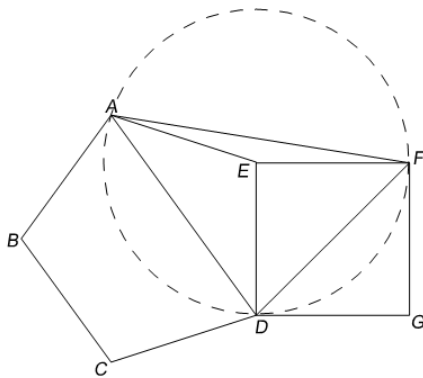
$$\angle BAD = \angle EAB - \angle DAE = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$$

$$(7) \angle BAD + \angle B = 72^\circ + 108^\circ = 180^\circ \Rightarrow BC \parallel AD$$

$$\angle B = \angle C = 108^\circ \neq 90^\circ \Rightarrow AB \nparallel CD \Rightarrow ABCD \text{ טרפז } (\checkmark)$$

נתון: $AB = CD \Leftrightarrow ABCD$ טרפז שווה-שוקים $(\checkmark)$

ד.



הנקודה E נמצאת במרחקים שווים מכל אחת מהנקודות A, D ו-F וזאת ישירות מהנתון כי המחומש הוא משוכלל והמרובע הוא ריבוע.

לכן היא יכולה לשמש כמרכז המעגל שעליו אותן נקודות, והמרחק שלה מכל אחת מהן הוא אורך הרדיוס: $EA = ED = EF = R$

(1) נוסחת גודל זווית של מצולע משוכלל (2) זווית ריבוע היא זווית ישרה

(3) נתון (4) זוויות בסיס במשולש שווה-שוקיים שוות זו לזו

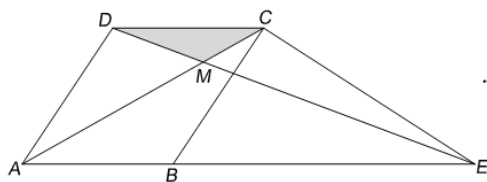
(5) ע"פ סעיף א' (6) השלמה ל- 180° במשולש

(7) אם זוויות חד-צדדיות בשני ישרים הנחתכים ע"י ישר שלישי משלימות ל- 180°

אזי הישרים מקבילים זה לזה

שאלה 4

ABCD היא מקבילית. הנקודה E מונחת על המשך הצלע AB.



הישרים AC ו-DE נחתכים בנקודה M.

$AB = m$, $BE = km$, $S_{\triangle DCM} = S_1$, $S_{AECD} = S_2$

א. הוכח: $S_2 = (k+2)^2 \cdot S_1$

ב. הוכח שאם שטח המשולש DCM

שווה לשטח המשולש BCE אזי $k = \sqrt{2} - 1$.

פתרון:

א. נסמן את הגובה לבסיס CD במשולש MCD : h_{CD}

את הגובה לבסיס AB במשולש MAE : h_{AE}

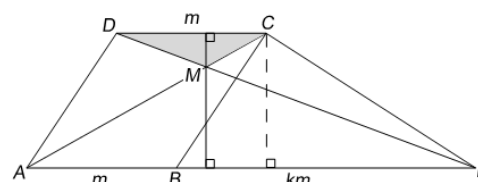
ואת גובה הטרפז: H

$$AB = m \Rightarrow^{(1)} CD = m$$

$$(2) CD \parallel AB \Rightarrow^{(3)} \triangle CDM \sim \triangle AEM$$

$$\Rightarrow^{(4)} \frac{h_{CD}}{h_{AE}} = \frac{CD}{AE} = \frac{m}{m+km} = \frac{1}{1+k}$$

$$\Rightarrow h_{AE} = (1+k)h_{CD}$$



$$S_{\triangle CDM} = \frac{CD \times h_{CD}}{2} = \frac{m \times h_{CD}}{2} = S_1 \Rightarrow h_{CD} = \frac{2S_1}{m} \Rightarrow h_{AE} = \frac{2S_1(1+k)}{m}$$

$$\Rightarrow H = h_{CD} + h_{AE} = \frac{2S_1}{m} + \frac{2S_1(1+k)}{m} = \frac{2S_1(1+1+k)}{m} = \frac{2S_1(2+k)}{m}$$

$$S_{AECD} = S_2 = \frac{(AE+CD) \cdot H}{2} = \frac{(m+km+m) \times \frac{2S_1(2+k)}{m}}{2} = \frac{(2m+km)S_1(2+k)}{m} = m(2+k) \times \frac{S_1(2+k)}{m}$$

$$\Rightarrow S_2 = S_1(k+2)^2 \quad (\checkmark)$$

ב. הגובה לבסיס BE במשולש CBE הוא גובה הטרפז: H

$$\Rightarrow S_{\triangle CBE} = \frac{BE \cdot H}{2} = \frac{km \cdot \frac{2S_1(2+k)}{m}}{2} = kS_1(2+k)$$

$$S_{\triangle CBE} = S_{\triangle DCM} \Rightarrow kS_1(2+k) = S_1 \Rightarrow k(2+k) = 1 \Rightarrow k^2 + 2k - 1 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$k > 0 \Rightarrow k = \sqrt{2} - 1 \quad (\checkmark)$$

(1) צלעות נגדיות במקבילית - שוות זו לזו

(2) צלעות נגדיות במקבילית - מקבילות זו לזו (הגדרת מקבילית)

(3) משפט תאלס

(4) היחס בין גבהים של משולשים דומים שווה ליחס הצלעות