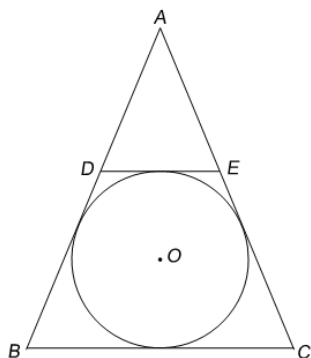


חמש שאלות בגיאומטריה

שאלה 1



במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$) חסום מעגל שמרכזו O .

DE משיק למעגל, ומקביל לבסיס המשולש BC .

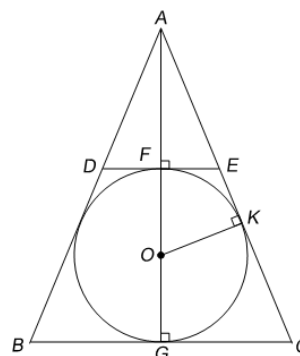
נתון: $AB = AC = 26\text{cm}$, $BC = 20\text{cm}$.

א. חשב את אורך רדיוס המעגל החסום במשולש.

ב. חשב את אורך הקטע DE .

פתרון:

א.



$$AB = AC = 26\text{cm}, BC = 20\text{cm}, R = ?$$

בנית עזר: OK , $AG \perp BC$ רדיוס

מרכז המעגל החסום במשולש הוא מפגש חוצי-הזוויות שלו.

גובה לבסיס במשולש שווה-שוקיים הוא גם חוצה זווית.

זווית בין משיק למעגל לרדיוס היא זווית ישרה.

לכן AG עובר דרך מרכז המעגל,

ודרך נקודות ההשקה שלו עם BC ו- DE .

$$BC = 20\text{cm}, (1) BG = GC \Rightarrow GC = 10\text{cm}$$

$$\triangle AGC: (2) AG = \sqrt{AC^2 - GC^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24\text{cm}$$

$$OG = R \Rightarrow AO = 24 - R$$

$$(3) \angle KAO_{\triangle KAO} = \angle GAC_{\triangle GAC}, \angle AKO = \angle AGC (= 90^\circ) \Rightarrow^{(4)} \triangle KAO \sim \triangle GAC$$

$$\Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{KO}{GC} \Rightarrow \frac{24-R}{26} = \frac{R}{10} \Rightarrow 240 - 10R = 26R \Rightarrow 36R = 240$$

$$\Rightarrow R = \frac{240}{36} = \frac{60}{9} = \frac{20}{3} \Rightarrow R = 6\frac{2}{3}\text{cm}$$

$$AF = 24 - 2R = 24 - 2 \cdot 6\frac{2}{3} = 24 - 13\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}$$

$$FE \parallel GC \Rightarrow^{(5)} \triangle AFE \sim \triangle AGC \Rightarrow \frac{AF}{AG} = \frac{FE}{GC} \Rightarrow \frac{10\frac{2}{3}}{24} = \frac{FE}{10}$$

$$\Rightarrow FE = \frac{10 \cdot 10\frac{2}{3}}{24} = \frac{10 \cdot \frac{32}{3}}{24} = \frac{10 \cdot 32}{24 \cdot 3} = \frac{10 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{40}{9} \Rightarrow DE = 2 \cdot \frac{40}{9} = \frac{80}{9} \Rightarrow DE = 8\frac{8}{9} \text{ cm}$$

(1) גובה לבסיס במשולש שווה-שוקים הוא גם תיכון

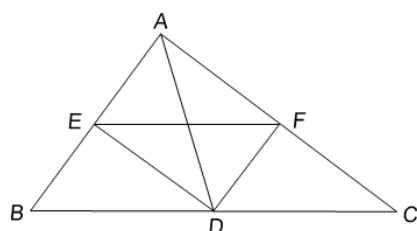
(2) משפט פיתגורס

(3) זווית משותפת

(4) משפט דמיון זווית-זווית

(5) משפט תאלס

שאלה 2



AD הוא התיכון לצלע BC במשולש BAC.

DE חוצה זווית $\angle ADB$.

DF חוצה זווית $\angle ADC$.

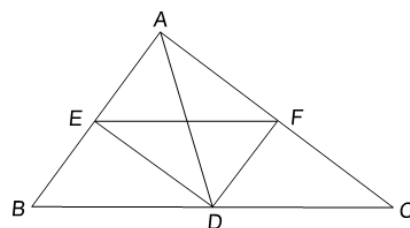
הוכח כי: $EF \parallel BC$.

פתרון:

$$\triangle ADC: (1) \frac{AF}{FC} = \frac{DA}{DC}, \quad \triangle ADB: (1) \frac{AE}{EB} = \frac{DA}{DB}$$

$$(2) DB = DC \Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{DA}{DB} \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EB}$$

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow^{(3)} EF \parallel BC (\checkmark)$$

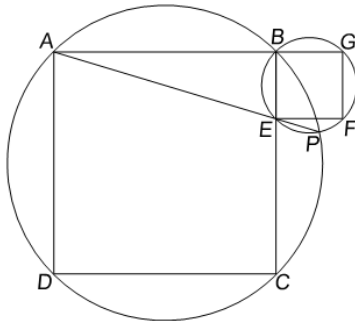


(1) חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני חלקים,

המתייחסים זה לזה כיחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה (2) נתון

(3) הפוך לתאלס: שני ישרים המקצים על שוקי זווית קטעים פרופורציוניים - מקבילים זה לזה

שאלה 3



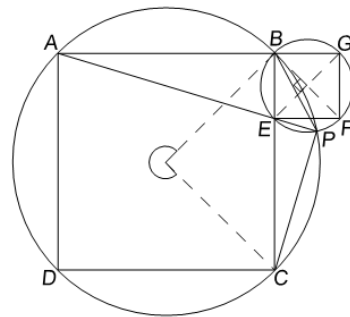
ABCD ו-BEFG הם ריבועים החסומים במעגלים.
שני המעגלים נחתכים בנקודות B ו-P.
הוכח: הנקודות E, P, A נמצאות על קו ישר אחד.

פתרון:

$$(7, 8) \quad \angle BPE = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$(8) \quad \angle BPC = \frac{270^\circ}{2} = 135^\circ$$

$$\angle EPC = \angle BPC - \angle BPE = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$$

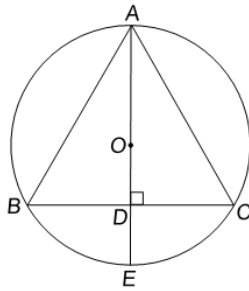


אם נמתח קו ישר מ-P ל-A נקבל את הזווית APC שנשענת על קוטר ולכן: $\angle APC = 90^\circ$
לא ניתן להוציא מ-P שתי קרניים (EP ו-AP) באותו כיוון כך שכל אחת מהן יוצרת עם PC
זווית ישרה. מסקנה: E נמצאת על הישר AP (✓)

(7) אלכסוני ריבוע מאונכים זה לזה

(8) זווית היקפית במעגל שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת

שאלה 4



משולש שווה-צלעות ABC חסום במעגל.

O מרכז המעגל, $AD \perp BC$.

AD גובה במשולש והמשך AD חותך את המעגל בנקודה E.

הוכח: $DO = DE$.

פתרון:

בנית עזר: CE, OC

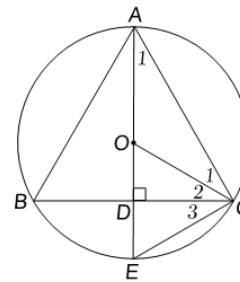
$$(1, 2) \angle A_1 = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$OA = OC = R \Rightarrow^{(3)} \angle C_1 = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \angle C_2 = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$

$$(4) \angle ACE = 90^\circ \Rightarrow \angle C_3 = 90^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \angle C_2 = \angle C_3 \Rightarrow^{(5)} CO = CE \Rightarrow^{(6)} DO = DE \quad (\checkmark)$$



(1) גודל זווית במשולש שווה-צלעות הוא 60°

(2) גובה במשולש שווה-צלעות הוא גם חוצה זווית

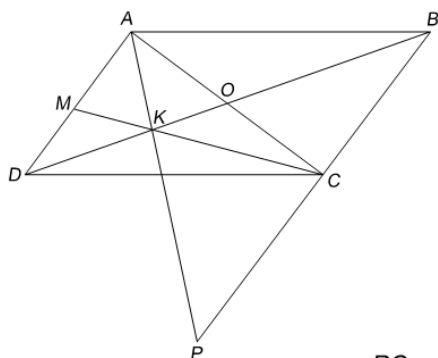
(3) זווית בסיס במשולש שווה-שוקים ($\triangle AOC$) - שוות זו לזו

(4) זווית היקפית הנשענת על קוטר - היא זווית ישרה

(5) משולש שבו הגובה הוא גם חוצה זווית ($\triangle OCE$) - הוא משולש שווה-שוקיים

(6) הגובה לבסיס במשולש שווה-שוקיים ($\triangle OCE$) - הוא גם תיכון

שאלה 5



אלכסוני המקבילית ABCD נפגשים בנקודה O.

נקודה K נמצאת על האלכסון BD כך ש: $BK = 2DK$.

M היא נקודת המפגש בין צלע המקבילית AD

לבין המשך CK.

P היא נקודת המפגש בין המשכי BC ו- AK .

הוכח: א. $DK = 2KO$ ב. $CK = 2KM$

ג. נתון: $\angle CAD = 90^\circ$ הוכח: (1) $AP = AB$ (2) $PC = CB$

פתרון:

$$(1) OB = OD = x^{(2)}, (2) DK = y$$

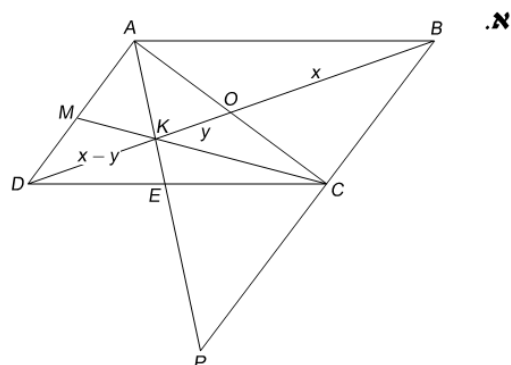
$$OK = DO - KO = x - y$$

$$(3) BK = 2KD \Rightarrow x + y = 2(x - y)$$

$$x + y = 2x - 2y \Rightarrow x = 3y$$

$$DK = x - y = 3y - y = 2y$$

$$DK = 2y, OK = y \Rightarrow DK = 2OK (\checkmark)$$



ב. התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת, המחלקת אותם ביחס של 2:1,

כשהחלק הגדול קרוב לקודקוד, ולהיפך.

נתבונן במשולש ADC: DO היא תיכון לצלע AC ו-K מחלקת אותה ביחס של 2:1

$\Leftarrow$ K היא מפגש התיכונים של המשולש

$\Leftarrow$ CM עוברת דרך K $\Leftarrow$ CM תיכון לצלע AD

$\Leftarrow$ K מחלקת את CM באותו יחס (2:1) $\Leftarrow$ $CK = 2KM (\checkmark)$

ג. נתבונן שוב במשולש ADC: AE עובר דרך K ולכן גם AE הוא תיכון.

בנתוני הסעיף ($\angle DAC = 90^\circ$) AE הוא תיכון ליתר, ולכן שווה למחציתו: $AE = DE = EC$

$$(4) \quad AD \parallel CP \Rightarrow^{(5)} \triangle ADE \sim \triangle PCE$$

$$DE = EC \Rightarrow \triangle ADE \cong \triangle PCE \Rightarrow \underline{AD = PC}$$

$$(6) \quad \underline{AD = BC} \Rightarrow \underline{BC = PC} \quad (\checkmark)$$

$$(3) \quad \angle DAC = 90^\circ, \quad AD \parallel CP \Rightarrow^{(7)} \angle DAC = \angle BCA = 90^\circ \Rightarrow AC \perp BP$$

$$BC = CP, \quad AC \perp BP \Rightarrow^{(8)} \underline{AP = AB} \quad (\checkmark)$$

(1) אלכסוני מקבילית חוצים זה את זה (2) סימון (3) נתון

(4) צלעות מקבילית מקבילות זו לזו (5) משפט דמיון זווית-זווית

(6) צלעות נגדיות במקבילית שוות זו לזו

(7) זוויות מתחלפות בישרים מקבילים הנחתכים ע"י ישר שלישי - שוות זו לזו

(8) משולש שגובה לאחת מצלעותיו צלע הוא גם תיכון הוא משולש שווה-שוקים,

ואותה צלע היא הבסיס