

עוד שתי שאלות בגיאומטריה

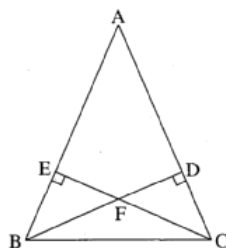
שאלה 1

במשולש ABC הגבהים BD ו-CE נפגשים בנקודה F. נתון כי $BD=CE$. הוכיחו כי:

א. המשולש ABC הוא שווה שוקיים.

ב. $FC=BF$.

ג. $AD=AE$.



פתרון

א. נוכיח כי המשולשים BCE ו-BCD חופפים.

נתון כי $BD=CE$. הם גבהים במשולש לכן הזוויות BDC ו-BEC זוויות ישרות (וכמובן שוות). כמו כן $BC=BC$. מכאן נובע כי המשולשים BCE ו-BDC חופפים על פי משפט החפיפה הרביעי.

מהחפיפה נובע כי $\angle ABC = \angle ACB$. מכיוון שבמשולש מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות, נקבל כי $AC=AB$, כלומר משולש ABC שווה שוקיים.

ב. נוכיח כי המשולשים BCE ו-BCD חופפים.

מחפיפת המשולשים בסעיף א' נובע גם כי $DC=BE$. כמו כן הראינו כי הזוויות BDC ו-BEC שוות, וכן גם הזוויות EFB ו-DFC שוות (זוויות קדקודיות). מכאן שגם הזוויות EBF ו-DCF שוות. לכן המשולשים EFB ו-DFC חופפים על פי משפט החפיפה השני. מהחפיפה נובע כי $BF=FC$.

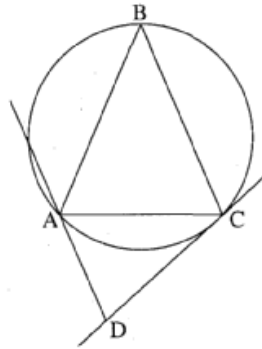
ג. בסעיף א' הוכחנו כי $AC=AB$, ובסעיף ב' הוכחנו כי $DC=BE$. נחסיר אגפים ונקבל כי

$$AB-DC=AC-DC$$

$$AE=AD$$

שאלה 2

משולש שווה שוקיים ABC (בו $BC=AB$) חסום במעגל. דרך הקדקוד C הועבר משיק למעגל, ודרך הקדקוד A הועבר ישר המקביל לצלע BC וחותך את המשיק בנקודה D. נתון כי $AB=16$, וכי $AD=9$. חשבו את היקף המשולש ACD.



פתרון

נראה כי $\triangle ABC \sim \triangle ACD$:

זווית בין משיק למיתר שווה לזווית היקפית שנשענת על המיתר, ולכן $\angle ACD = \angle ABC$.
 $BC \parallel AD$ ולכן $\angle CAD = \angle ACB$ כזוויות מתחלפות בין מקבילים.
לכן $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ על פי משפט הדמיון השני. ולכן:

$$\begin{aligned}\frac{AB}{AC} &= \frac{AC}{AD} \\ \frac{16}{AC} &= \frac{AC}{9} \\ AC^2 &= 9 \cdot 16 = 144 \\ AC &= 12\end{aligned}$$

בנוסף, כיוון המשולש ABC שווה שוקיים, גם המשולש ACD הדומה לו הוא שווה שוקיים ($CA=CD$). לכן היקף משולש ACD הוא:

$$\begin{aligned}P &= AD + AC + CD = \\ &= AD + 2 \cdot AC = \\ &= 9 + 2 \cdot 12 = 33\end{aligned}$$