

שתי שאלות בפונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

שאלה 1

לגרף הפונקציה $y = e^{x/2}$ העבירו משיק בנקודה ברביע הראשון בה $x = t$.

א. הביעו באמצעות t את משוואת המשיק.

ב. המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה בה $x = 2$. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, המשיק וציר ה- y .

פתרון

א. משוואת משיק לפונקציה בנקודה $(x_0, f(x_0))$ שעל גרף הפונקציה היא מהצורה

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

אצלנו

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} \quad x_0 = t, \quad f(x_0) = f(t) = e^{\frac{t}{2}}$$

ולכן משוואת המשיק היא

$$y - e^{\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}(x - t)$$

ולאחר שנסדר אותה קצת נקבל

$$y = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}x - \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}t + e^{\frac{t}{2}}$$

ב. אנחנו יודעים שאם נציב $x=2$ במשוואת המשיק אז $y=0$ ולכן

$$0 = e^{\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}t + e^{\frac{t}{2}}$$

$$2 = \frac{t}{2}$$

$$t = 4$$

ולכן משוואת המשיק היא

$$y = \frac{1}{2}e^2x - e^2$$

האינטגרל המבוקש הוא אינטגרל בין נקודת ההשקה ($x=4$) לבין ציר ה- y ($x=0$) של הפונקציה פחות המשיק (כי מבקשים את השטח הכלוא בין השתיים) ולכן

$$S = \int_0^4 e^{\frac{x}{2}} - \left(\frac{1}{2}e^2x - e^2\right) dx = \int_0^4 e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}e^2x + e^2 dx = \left[2e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{4}e^2x^2 + e^2x \right]_0^4 = 2e^2 - 4e^2 + 4e^2 - (2 + 0 + 0) = 2e^2 - 2$$

שאלה 2

נתונה הפונקציה $y = \ln(x^2) - \frac{x^2}{a}$, כאשר $a > 0$.

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- הביעו באמצעות a את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגיהן.
- עבור אלו ערכים של a גרף הפונקציה נמצא כולו מתחת לציר ה- x ?

פתרון

א. הפונקציה מוגדרת כאשר הביטוי עליו מופעלת פונקצית הלוגריתם חיובי:

$$x^2 > 0$$

$$x > 0 \text{ או } x < 0$$

כלומר הפונקציה מוגדרת לכל $x \neq 0$.

ב. נגזור את הפונקציה פעמיים:

$$y = \ln(x^2) - \frac{x^2}{a}$$

$$y' = \frac{2x}{x^2} - \frac{2x}{a} = \frac{2}{x} - \frac{2x}{a}$$

$$y'' = -\frac{2}{x^2} - \frac{2}{a}$$

נשווה את הנגזרת הראשונה לאפס כדי לאתר נקודות החשודות כנקודות קיצון:

$$\frac{2}{x} - \frac{2x}{a} = 0$$

$$2a = 2x^2$$

$$x = \pm\sqrt{a}$$

נבדוק את סימן הנגזרת השנייה בנקודות אלה:

$$y''(-\sqrt{a}) = -\frac{2}{a} = -\frac{4}{a} < 0 \Rightarrow \text{Max}$$

$$y''(\sqrt{a}) = -\frac{2}{a} = -\frac{4}{a} < 0 \Rightarrow \text{Max}$$

לפונקציה יש שתי נקודות מקסימום, וערכה בשתי נקודות אלה הוא

$$y(-\sqrt{a}) = y(\sqrt{a}) = \ln(a) - \frac{a}{a} = \ln(a) - 1$$

ג. גרף הפונקציה נמצא כולו מתחת לציר ה- x כאשר

$$\ln(a) - 1 < 0$$

$$\ln(a) < 1$$

$$a < e$$

נזכור כי נתון מראש ש- $a > 0$ ולכן תחום הערכים של a גרף הפונקציה נמצא כולו

מתחת לציר ה- x הוא $0 < a < e$.