

שאלת אקסטרה בפונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

שאלה

נתונה הפונקציה $f(x) = x e^{x^2}$.

- א. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה). נמק.
- ב. מצא את תחומי הקעירות של הפונקציה כלפי מעלה (–) וכלפי מטה (–).
ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- הישר $x = a$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה E .
דרך הנקודה E מעבירים ישר המקביל לציר x .
נסמן: S_1 - השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי הישר $x = a$ ועל ידי ציר x .
 S_2 - השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה $f(x)$, ע"י הישר המקביל לציר x וע"י ציר y .
נתון כי S_2 גדול ב-1 מ- S_1 .
ד. מצא את הערך של a (מצא את שני הפתרונות).
ה. סמן בצורה סכמטית בגרף שסרטטת בסעיף ג, את S_1 ואת S_2 עבור שני הפתרונות של a .

פתרון

א.

$$f(x) = x e^{x^2}$$

$$f'(x) = e^{x^2} + x \cdot e^{x^2} \cdot 2x = e^{x^2} (1 + 2x^2) > 0 \quad \forall x \Rightarrow f' \nearrow \quad \forall x$$

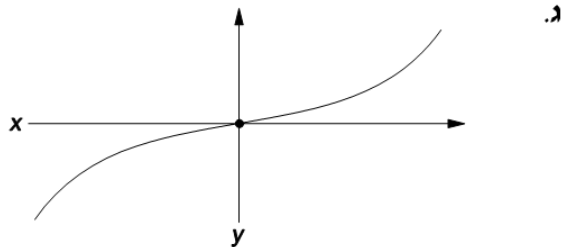
ב.

$$f''(x) = e^{x^2} \cdot 2x(1 + 2x^2) + e^{x^2} \cdot 4x = 2xe^{x^2} (1 + 2x^2 + 2) = 2xe^{x^2} (2x^2 + 3) \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\underline{x < 0}: f''(x) = 2 \cdot (-) \cdot (+) \cdot (+) < 0 \Rightarrow \text{—} \text{—} \text{—}: x < 0$$

$$\underline{x > 0}: f''(x) = 2 \cdot (+) \cdot (+) \cdot (+) > 0 \Rightarrow \text{—} \text{—} \text{—}: x > 0$$

$f(0) = 0 \Rightarrow (0,0)$ פיתול



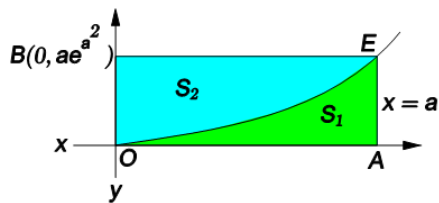
ד. נבדוק בציור רק עבור $a > 0$. משיקולי סימטריה נקבל תשובה זהה גם עבור $a < 0$.

$$S_2 = S_1 + 1 \Rightarrow S_{OAEB} - S_1 = S_1 + 1$$

$$a \cdot ae^{a^2} = 2S_1 + 1 \Rightarrow a^2 e^{a^2} = 2 \int_0^a x e^{x^2} dx + 1$$

$$a^2 e^{a^2} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} e^{x^2} \right) \Big|_0^a + 1 \Rightarrow a^2 e^{a^2} = 2 \left(\frac{1}{2} e^{a^2} - \frac{1}{2} \right) + 1$$

$$a^2 e^{a^2} = e^{a^2} - 1 + 1 = e^{a^2} \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$



(*) $\int x e^{x^2} dx$: $x^2 = u \Rightarrow 2x dx = du$

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + c = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

