

שאלות נוספות בפונקציה מעריכית/לוגריתמית

שאלה 1

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - 2x - a}{e^{-x}}$. a הוא פרמטר.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

פתרון. מכיוון שהמכנה e^{-x} תמיד שונה מ-0, לכן תחום ההגדרה הוא הישר הממשי כולו.

ב. מצא עבור אלו ערכים של a יש לפונקציה $f(x)$ שתי נקודות קיצון.

פתרון. מכיוון ש- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, הפונקציה היא $f(x) = (x^2 - 2x - a)e^x$, ולפי נוסחת הנגזרת של מכפלת פונקציות נגזרתה היא $f'(x) = (x^2 - 2x - a)e^x + (2x - 2)e^x = (x^2 - (a + 2))e^x$. מכיוון ש- e^x תמיד חיובי ועבור $a + 2 \leq 0$ גם $x^2 - (a + 2)$ תמיד אי-שלילי, לכן הנגזרת יכולה לשנות סימן רק כאשר $a + 2 > 0$. כלומר כאשר $a > -2$. עבור ערכים אלו של a הנגזרת היא חיובית עבור ערכי x הגדולים בערכם המוחלט מ- $\sqrt{a + 2}$, ושלילית עבור $x = 0$, ולכן ב- $-\sqrt{a + 2}$ סימן הנגזרת מתחלף מחיובי לשלילי וזאת נקודת מקסימום וב- $\sqrt{a + 2}$ סימן הנגזרת מתחלף משלילי לחיובי וזאת נקודת מינימום.

הצב את הערך של a שמצאת וענה על הסעיפים ד-ז.

ג. דרך נקודות הקיצון של הפונקציה העבירו ישרים המאונכים לציר ה- x . המרחק בין הישרים הוא 6. מצא את ערך הפרמטר a .

פתרון. המרחק בין נקודות הקיצון הוא $\sqrt{a + 2} - (-\sqrt{a + 2}) = 2\sqrt{a + 2}$, ומכיון שמרחק זה הוא 6 פתרון המשוואה $2\sqrt{a + 2} = 6$ נותן את הערך 7 ל- a .

ד. מצא את סוגי הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

פתרון. כבר ראינו בפתרון של סעיף ב' כי $-\sqrt{a + 2}$ היא נקודת מקסימום ו- $\sqrt{a + 2}$ היא נקודת מינימום.

ה. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים. בתשובתך דייק עד שתי ספרות מימין לנקודה עשרונית.

פתרון. הפונקציה היא $f(x) = (x^2 - 2x - 7)e^x$. היא מקבלת את הערך 0 כאשר $x^2 - 2x - 7 = 0$, ופתרונות משוואה ריבועית זאת הם $1 \pm \sqrt{8} = 1 \pm 2\sqrt{2}$. לכן גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודות $(1 - \sqrt{8}, 0)$ ו- $(1 + \sqrt{8}, 0)$. את הערך העשרוני המקורב יש למצוא במחשבון. $f(0) = -7$, ולכן נקודת החיתוך של גרף f עם ציר ה- y היא $(0, -7)$.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
הסקיצה אינה מופיעה כאן.

ו. לפניך סקיצה של גרף פונקציה הנגזרת $f'(x)$. מצא את השטח המוגבל ע"י הגרף של $f'(x)$, ע"י הישר $x = -5$, על ידי ציר ה-y וע"י ציר ה-x.

פתרון. הנגזרת היא $e^x(x^2 - 9)$, ולכן היא חיובית בין -5 ל-3 ושליילית בין -3 ל-0. לכן השטח מעל ציר

ה-x הוא $\int_{-5}^{-3} f'(x) dx = f(-3) - f(-5)$, והשטח מתחת לציר ה-x הוא

$$-\int_{-3}^0 f'(x) dx = -(f(0) - f(-3)) = f(-3) - f(0)$$

$$.2f(-3) - f(-5) - f(0) = 16e^3 - 28e^5 + 7$$

שאלה 2

א. נתונה הפונקציה $f(x) = \log_b(ax)$ בתחום $0 < b < 1$, $a > 0$, $1 \leq x \leq 2$.

בתחום הנתון הערך הגדול ביותר של הפונקציה הוא 4, והערך הקטן ביותר של הפונקציה היא 2. מצא את הערך של a ואת הערך של b.

פתרון. $\log_b(x) = \frac{\ln x}{\ln b}$ ולכן $f(x) = \frac{\ln(ax)}{\ln b} = \frac{\ln a}{\ln b} + \frac{\ln x}{\ln b}$ ולכן $f'(x) = \frac{1}{\ln b} \cdot \frac{1}{x}$. מכיוון ש- $0 < b < 1$

$\ln b$ הוא שלילי, ולכן $f(x)$ יורדת בקטע $[1, 2]$. לכן ערכה המקסימלי 4 מתקבל כאשר $x=1$, וקיים

$$.2 = \frac{\ln a}{\ln b} + \frac{\ln 1}{\ln b} = \frac{\ln a}{\ln b} \quad \text{וערכה המינימלי 2 מתקבל כאשר } x=2 \text{ וקיים}$$

$$\frac{\ln a}{\ln b} = 4 \quad \text{בשוויון זה נותנת } \frac{\ln 2}{\ln b} = -2 \quad \text{ולכן } \ln b = -\frac{1}{2} \ln 2 \quad \text{והעלאת } e \text{ בחזקת כל אחד משני}$$

$$\text{אגפים אלו נותנת } b = e^{-\frac{1}{2} \ln 2} = (e^{\ln 2})^{-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{מכיוון ש- } \frac{\ln a}{\ln b} = 4, \text{ לכן } \ln a = 4 \ln b, \text{ ולכן } a = b^4, \text{ ולכן } ..$$

ב. נתונה הפונקציה $f(x) = \log_a(\tan x) + \log_a\left(\frac{3x-x^2}{\tan x}\right)$ בתחום $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < a < 1$.

מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של $f(x)$ בתחום הנתון (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.
שים לב: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

פתרון.

$$f(x) = \frac{\ln(\tan x)}{\ln a} + \frac{\ln\left(\frac{3x-x^2}{\tan x}\right)}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \left[\ln(\tan x) + \ln(3x-x^2) - \ln(\tan x) \right] = \frac{1}{\ln a} \ln(3x-x^2)$$

לכן, לפי כלל השרשרת $f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{3x-x^2} (3-2x)$. בקטע $(0, 3)$ קיים $3x-x^2 > 0$, ולכן $3x-x^2$

אינו מחליף סימן בתחום f . $3-2x$ מחליף סימן ב- $x = \frac{3}{2}$ מחיובי לשלילי, ומכיוון ש- $a < 1$ הוא

שלילי, וב- $x = \frac{3}{2}$ $f'(x)$ מחליפה סימן משלילי לחיובי, ולכן יש לפונקציה f מינימום ב- $x = \frac{3}{2}$.