

עוד שאלה בפונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

שאלה

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^x}{e^x + b}$, $b > 0$, הוא פרמטר.

- א. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- ב. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).
- ג. הבע באמצעות b את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
- ד. נתון כי לפונקציה יש נקודת פיתול אחת.
- הראה כי: (1) שיעור y של נקודת הפיתול של הפונקציה אינו תלוי ב- b .
- (2) שיפוע המשיק בנקודת הפיתול אינו תלוי ב- b .
- ה. סרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה עבור: (1) $b = e$ (2) $b = \frac{1}{e}$.
- סמן את הגרפים במספרים (1) ו- (2) בהתאמה.
- ו. העבירו משיק בנקודת הפיתול לפונקציה שעבורה $b = e$,
- והעבירו משיק בנקודת הפיתול לפונקציה שעבורה $b = \frac{1}{e}$.
- מצא את שטח המרובע הנוצר על-ידי שני המשיקים, על-ידי ציר x ועל-ידי הישר העובר דרך שתי נקודות הפיתול.

פתרון

א. $f(x) = \frac{e^x}{e^x + b}$

המכנה אינו מתאפס: $e^x > 0$ לכל x ונתון: $b > 0$. לכן אין אסימפטוטה אנכית.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + b} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{b}{e^x}} = \frac{1}{1 + 0} = 1 \Rightarrow y_{\rightarrow} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + b} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{e^{-x}}}{\frac{1}{e^{-x}} + b} = \frac{0}{0 + b} = 0 \Rightarrow y_{\leftarrow} = 0$$

ב.

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + b) - e^x \cdot e^x}{(e^x + b)^2} = \frac{b e^x}{(e^x + b)^2} > 0 \quad \forall x \Rightarrow f(x) \nearrow \quad \forall x \quad (\text{עולה בכל התחום})$$

ג.

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{e^0}{e^0 + b} = \frac{1}{1 + b} \Rightarrow (0, \frac{1}{1+b}), \quad y = 0 \Rightarrow e^x = 0 \Rightarrow \emptyset$$

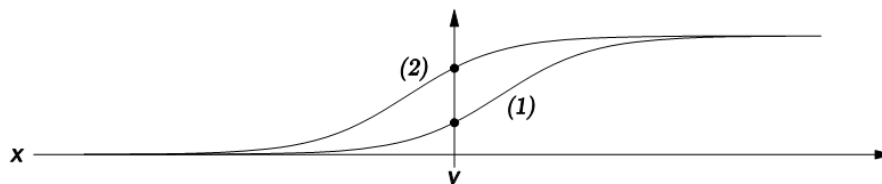
ד 1-2 .

$$f''(x) = \frac{be^x(e^x+b)^2 - 2(e^x+b) \cdot e^x \cdot be^x}{(e^x+b)^4} = \frac{be^x(e^x+b) - 2be^{2x}}{(e^x+b)^3} = \frac{be^x(e^x+b-2e^x)}{(e^x+b)^3} = \frac{be^x(b-e^x)}{(e^x+b)^3} \stackrel{?}{=} 0$$

שיעור x של נקודת הפיתול: $b - e^x = 0 \Rightarrow e^x = b \Rightarrow x = \ln b$

$$f(\ln b) = \frac{e^{\ln b}}{e^{\ln b} + b} = \frac{b}{b+b} \Rightarrow f(\ln b) = \frac{1}{2} \quad (\checkmark), \quad \text{אכן, אין תלות ב-} b \quad (1)$$

$$f'(\ln b) = \frac{b e^{\ln b}}{(e^{\ln b} + b)^2} = \frac{b \cdot b}{(b+b)^2} = \frac{b^2}{4b^2} \Rightarrow f'(\ln b) = \frac{1}{4} \quad (\checkmark), \quad \text{אכן, אין תלות ב-} b \quad (2)$$



ה.

הסבר: עבור שני המקרים יש אסימפטוטה $y=0$ ב- $-\infty$ ואסימפטוטה $y=1$ ב- $+\infty$.

גרף (1) $(b=e)$ חותך את ציר y בנקודה ששיעור y שלה הוא: $\frac{1}{1+e} = 0.2689$
 וגרף (2) $(b=\frac{1}{e})$ חותך את ציר y בנקודה ששיעור y שלה הוא: $\frac{1}{1+\frac{1}{e}} = 0.7312$
 עבור כל x מתקיים: $e^x + \frac{1}{e} < e^x + e$ לכן: $\frac{e^x}{e^x + \frac{1}{e}} > \frac{e^x}{e^x + e}$ ולכן: $(2) > (1)$

ו.

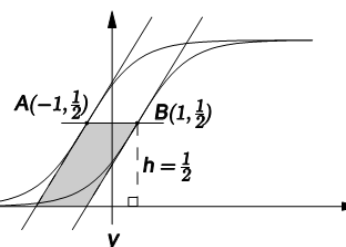
$$(1) \quad b=e \Rightarrow x = \ln e = 1, \quad f(1) = \frac{1}{2}, \quad f'(1) = \frac{1}{4}$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

$$(2) \quad b=\frac{1}{e} \Rightarrow x = \ln \frac{1}{e} = -1, \quad f(-1) = \frac{1}{2}, \quad f'(-1) = \frac{1}{4}$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x+1) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

המרובע שהתקבל הוא מקבילית



$$S = AB \cdot h = (1 - (-1)) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow S = 1 \quad \text{(יחידה ריבועית)}$$

שטח מקבילית