

שאלה בפונקציות מעריכיות ולוגריתמיות-שילוב עם דעיכה

שאלה

א. (1) בעיירה מסוימת נמצא כי אצל כל הגברים בעיירה שער הראש נושר בדעיכה מעריכית

מגיל עשרים ואחת ומעלה. כל שנה הגברים מאבדים 0.1% משער ראשם.

מצא כעבור כמה שנים מגיל עשרים ואחת יאבדו הגברים 0.2997% משער ראשם.

(2) נמצא כי אצל כל הילדות בעיירה מספר השערות גדל מאז הלידה בצורה מעריכית.

ביום מסוים היו לילדה מהעיירה 100,000 שערות.

כעבור m שנים נוספו לה 15,000 שערות.

הבע באמצעות m בכמה אחוזים גדל כל שנה מספר השערות של הילדה.

ב. נתונה פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x) = \frac{1}{(2x-1)^2} + e$.

לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון ב- $(0, 3)$. מצא את $f(x)$.

(אין קשר בין הסעיפים.)

פתרון

א. (1) הנוסחה: $m_t = m_0 \cdot a^t$. ניתן לקבוע את m_0 כפרמטר או כ-1 לצורך הנוחות.

$$a = 1 - \frac{0.1}{100} = 0.999, \quad m_t = 1 - \frac{0.2997}{100} = 0.997, \quad t = ?$$

$$0.997 \cdot 1 = 1 \cdot 0.999^t \Rightarrow t = \frac{\ln 0.997}{\ln 0.999} \Rightarrow t = 3 \text{ years}$$

(2)

$$m_0 = 100,000, \quad m_m = 115,000 \Rightarrow 115,000 = 100,000 \cdot a^m \Rightarrow a^m = 1.15 \Rightarrow a = 1.15^{\frac{1}{m}}$$

$$a = 1.15^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{p}{100} \Rightarrow p = 100 \cdot 1.15^{\frac{1}{m}} - 100$$

ב.

$$f''(x) = \frac{1}{(2x-1)^2} + e \Rightarrow f'(x) = \int \left(\frac{1}{(2x-1)^2} + e \right) dx = -\frac{1}{2(2x-1)} + ex + c_1$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2(0-1)} + 0 + c_1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(-\frac{1}{2(2x-1)} + ex - \frac{1}{2} \right) dx = -\frac{1}{4} \ln |2x-1| + \frac{ex^2}{2} - \frac{1}{2}x + c_2$$

$$f(0) = 3 \Rightarrow -\frac{1}{4} \ln 1 + 0 - 0 + c_2 = 3 \Rightarrow c_2 = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4} \ln |2x-1| + \frac{e}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$$