

שאלה בפונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

שאלה

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\ln \frac{x}{a}}$, $a > 0$, פרמטר a .

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(הבע באמצעות a במידה הצורך).

ב. נתון כי התחום שבו הפונקציה $f(x)$ עולה הוא $x > e^2$.

מצא את ערך הפרמטר a .

הצב בפונקציה את ערך הפרמטר a שמצאת, ופתור את סעיף ג.

ג. נתון כי ערך האינטגרל $\int_{e^2}^b \frac{1}{f(x)} dx$ הוא 1.5 ($b > e^2$).
חשב את ערך הפרמטר b .

פתרון

א.

$$f(x) = \frac{x}{\ln \frac{x}{a}}, \quad (1) \quad \frac{x}{a} > 0, \quad a > 0 \Rightarrow x > 0$$

$$(2) \quad \ln \frac{x}{a} \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{a} \neq e^0 = 1 \Rightarrow x \neq a$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow (0 < x < a) \cup (x > a)$$

ב.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \ln \frac{x}{a} - x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{a}}{\ln^2 \frac{x}{a}} = \frac{\ln \frac{x}{a} - 1}{\ln^2 \frac{x}{a}} \stackrel{?}{>} 0 \Rightarrow \ln \frac{x}{a} - 1 > 0 \Rightarrow \ln \frac{x}{a} > 1 = \ln e$$

$$e > 1 \Rightarrow \frac{x}{a} > e \Rightarrow \underline{x > ae}$$

הבסיס של הלוג שבאי השוויון

$$\frac{x > e^2}{\text{נתון}} \Rightarrow ae = e^2 \Rightarrow \underline{a = e}$$

ג.

$$\int \frac{1}{f(x)} dx = \int \frac{\ln \frac{x}{e}}{x} dx = \int \frac{\ln x - \ln e}{x} dx = \int \frac{\ln x - 1}{x} dx = \int \frac{\ln x}{x} dx - \int \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx : \quad \ln x = k \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} dx = dk$$

הצבה

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int k dk = \frac{1}{2} k^2 + c = \frac{1}{2} \ln^2 x + c$$

$$\begin{aligned} \int_{e^2}^b \frac{1}{f(x)} dx &= \left(\frac{1}{2} \ln^2 x - \ln x \right) \Big|_{e^2}^b = \left(\frac{1}{2} \ln^2 b - \ln b \right) - \left(\frac{1}{2} \ln^2 e^2 - \ln e^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln^2 b - \ln b - \frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 = \frac{1}{2} \ln^2 b - \ln b = 1.5 \quad \text{נתון} \end{aligned}$$

$$\ln^2 b - 2 \ln b = 3$$

$$\ln^2 b - 2 \ln b - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\ln b)_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2$$

$$(\ln b)_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad b_1 = e^3, \quad b > e^2 \quad \Rightarrow \quad \checkmark \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b = e^3}$$

$$(\ln b)_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad b = e^{-1} = \frac{1}{e}, \quad b > e^2 \quad \Rightarrow \quad \times$$