הוכחת נוסחת השורשים

נניח שיש לנו משוואה ממעלה שניה כלומר משוואה מהצורה

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

כאשר $a \neq 0$. אנו יוכלים לנסות לפתור אותה על ידי הוצאת גורם משותף או טרינום אך בפעמים רבות נגלה שאין אנו מסוגלים לפתור משוואה כזאת בעזרת טרינום. אין פירוש הדבר שאין דרך לפתור את המשוואה, דווקא ישנה דרך פשוטה מאוד שאינה דורשת הרבה מאמץ.

1 נוסחת השורשים

על מנת לפתור את המשוואה (1) כל שעלינו לעשות הוא להציב את a, b, c בנוסחת השורשים ונקבל ישר את פתרונות המשוואה. נוסחת השורשים נראית כך

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

הביטוי $b^2 - 4ac$ שנמצא מתחת לשורש נקרא הדיסקרימיננטה של המשוואה ומסומן בדרך כלל על ידי האות היוונית דלטא - δ. כאשר אנו מציבים את המספרים במשוואה נשים לב שאותה נוסחה משמשת אותנו לקבל את שני פתרונות המשוואה. על מנת לקבל את הפתרון הראשון נחבר את השורש ועל מנת לקבל את הפתרון השני נחסר אותו. ה־ $1, 2$ ליד ה־ x מסמלים את שני הפתרונות האלו בהתאמה.

ניתן לדעת את מספר הפתרונות של המשוואה במהירות על ידי התבוננות בדיסרקימננטה שלה. נחלק לשלושה מקרים:

1. $b^2 - 4ac > 0$ במקרה זה שבו הדיסקרימיננטה גדולה ממש מאפס יש למשוואה שני פתרונות כלומר שני שורשים שונים.

2. $b^2 - 4ac = 0$ במקרה זה שבו הדיסקרימיננטה מתאפסת יש למשוואה רק שורש אחד.

3. $b^2 - 4ac < 0$ במקרה זה הדיסקרימיננטה שלילית ולמשוואה אין אף פתרון ממשי. אין זה מפתיע כיוון שנוסחה דורשת למצוא את השורש של הדיסקרימיננטה ואילו השורש אינו מוגדר עבור מספרים שליליים.

2 הוכחת נוסחת השורשים

כמה מכם בוודאי תוהים למה בדיוק הנוסחה המוזרה הזו עובדת. בשביל כל אילו שתוהים נוכיח את הנוסחה בטכניקה שנקראת "השלמה לריבוע".

נזכר במשוואה הריבועית:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

כזכור אמרנו ש־ $a \neq 0$ ולכן נוכל לכפול את שני צדדי המשוואה ב־ $4a$ ונקבל

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

נעביר את $4ac$ אגף ונוסיף לשני אגפי המשוואה b^2 ונקבל

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

נשמתמש בנוסחאות הכפל המקוצר על מנת לפשט את אגף שמאל ונקבל

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

נוציא שורש ריבועי משני אגפי המשוואה ונקבל

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

מכאן בידודו של x הוא פשוט ועל ידי העברת ה־ b אגף וחלוקה ב $2a$ (זכור כי $a \neq 0$) נקבל

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

כנדרש.

אין צורך לדעת או לזכור את ההוכחה הזו, מה שחשוב הוא לזכור את נוסחת השורשים עצמה.