

חקירת פונקציה רציונאלית

שאלה

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{(x-b)^2}{x^2-4}$, $b > 2$.

א. מצא (הבא באמצעות b במידת הצורך):

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה, ואת האסימפטוטות שלה המקבילות לצירים.

(2) את השיעורים של נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים

(3) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. על פי הסקיצה של גרף הפונקציה, מצא את התחום שבו פונקציית הנגזרת $f'(x)$ שלילית וגם פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ שלילית, אם ידוע כי ל- $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד. נמק.

פתרון

א.

(1) תחום ההגדרה:

$$x^2 - 4 \neq 0$$

$$(x-2)(x+2) \neq 0$$

$$x \neq \pm 2$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2bx + b^2}{x^2 - 4}$$

אסימפטוטות:

$$y = 1, x \pm 2$$

(2) נשווה את $f(x) = 0$

$$\frac{(x-b)^2}{x^2-4} = 0$$

$$(x-b)^2 = 0$$

נקודת חיתוך עם ציר y , $(b, 0)$

נקודות חיתוך עם ציר x

$$f(0) = \frac{(-b)^2}{-4} = -\frac{b^2}{4}$$

וקיבלנו את $(0, -\frac{b^2}{4})$

(3) נגזור את הפונקציה

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x-b)(x^2-4) - 2x(x-b)^2}{(x^2-4)^2} = \frac{2(x-b)[x^2-4-x(x-b)]}{(x^2-4)^2} = \\ &= \frac{2(x-b)(x^2-4-x^2+xb)}{(x^2-4)^2} \end{aligned}$$

נשווה ל-0

$$f'(x) = \frac{2(x-b)(xb-4)}{(x^2-4)^2} = 0$$

$$x_1 = b; x_2 = \frac{4}{b}$$

$$f'(x) = \frac{2(bx^2 - 4x - b^{2x} + 4b)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$b > 2; 0 < \frac{4}{b} < 2; 4 < b^2: \text{הערות}$$

נגזור נגזרת שניה את המונה בלבד

$$f''(x) = 4bx - 8 - 2b^2$$

נציב $b = 3$ בשביל ההצבה בטבלה

x	-4	-2	0	$\frac{4}{b} \left(\frac{4}{3}\right)$	$\frac{2 + \frac{4}{b}}{2} \left(\frac{5}{3}\right)$	2	$\frac{2+b}{2} \left(\frac{5}{2}\right)$	$b(3)$	$2b(6)$
$f'(x)$	+		+	0	-		-	0	+
	↗		↗	max	↘		↘	min	↗

$$f''\left(\frac{4}{b}\right) = 4b \cdot \frac{4}{b} - 8 - 2b^2 = 16 - 8 - 2b^2 = 8 - \underbrace{2b^2}_{>8} < 0 \text{ (max)}$$

$$f''(b) = 4b - 4 - b^2 = \underbrace{3b^2}_{>6} - 4 > 0 \text{ (min)}$$

נגזור (את המונה בלבד)

$$f'(0) = 2(-b)(-4) = 8b > 0$$

$$f'(2b) = 2(2b - b)(2b^2 - 4) = 2b \left(\underbrace{2b^2}_{>4} - 4 \right) > 0$$

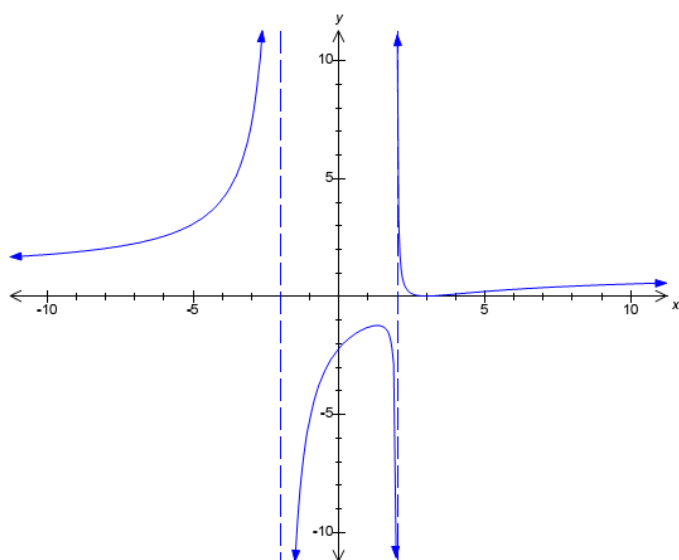
$$f'\left(\frac{2+b}{2}\right) = 2\left(\frac{2+b}{2} - b\right)\left(\frac{2+b}{2} \cdot b - 4\right) = 2 \underbrace{\left(1 - \frac{b}{2}\right)}_{<0} \underbrace{\left(\frac{\widetilde{2b} + \widetilde{b^2}}{2} - 4\right)}_{>0} = 2 \cdot (-) \cdot (+) < 0$$

$$f'\left(\frac{2 + \frac{4}{b}}{2}\right) = f'\left(1 + \frac{2}{b}\right) = 2 \left(1 + \frac{\widetilde{2}}{b} - \frac{\widetilde{b^2}}{b}\right) \left(\left(1 + \frac{2}{b}\right)b - 4\right) = 2(-)(+) < 0$$

$$f\left(\frac{4}{b}\right) = \frac{\left(\frac{4}{b} - b\right)^2}{\left(\frac{4}{b}\right)^2 - 4} = \frac{\frac{1}{b^2}(4 - b^2)^2}{\frac{4}{b^2}(4 - b^2)} = \frac{1}{4} \left(4 - \underbrace{b^2}_{>4}\right) < 0$$

$$\max\left(\frac{4}{b}, 1 - \frac{b^2}{4}\right), \quad \min\left(\frac{b}{0}\right)$$

ב.



ג. בתחום: $\frac{4}{b} < x < 2$, הפונקציה $f(x)$ יורדת וגם קעורה למטה, ולכן בתחום זה, $f'(x) < 0$
 ו- $f''(x) < 0$, לכן הפתרון הוא: $\frac{4}{b} < x < 2$