

חזרה על החומר של חקירת פונקציה לשאלון 006- חלק ב'

נסכם את כל מה שלמדנו במאמר הקודם ע"י תרגיל חקירה של פונקציה..

תרגיל

$$\text{נתונה הפונקציה- } g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - a}$$

לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית עבור $x = 4$.

א.מצא את a

ב. חקור את הפונקציה שהתקבלה לפי הסעיפים הבאים ומצא:

1. תחום הגדרה
 2. נקודות חיתוך עם הצירים
 3. אסימפטוטות מאונכות לצירים
 4. נקודות קיצון
 5. תחומי עלייה וירידה
- ג. בעזרת סעיף ב' צייר סקיצה של גרף הפונקציה.

פתרון מצא:

א. אם לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית עבור ערך מסוים של x , המכנה

$$\begin{aligned} x - a &= 0 \\ x = a &\Rightarrow a = 4 \end{aligned} \quad \text{כנראה מתאפס. לכן-}$$

ב. להלן התשובות:

1) הפונקציה מוגדרת כאשר המכנה לא מתאפס וכאשר הביטוי

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &\geq 0 & \text{וגם} & & x - 4 &\neq 0 \\ x \leq 0; x \geq 2 & & & & x &\neq 4 \end{aligned} \quad \text{שבשורש חיובי/אפס. לכן-}$$

תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x \leq 0$ או $2 \leq x < 4$ או $x > 4$.

(2) נקודות חיתוך עם הצירים הן נקודות שבהן הפונקציה חותכת את הצירים - וצריך לבדוק לחוד חיתוך עם ציר x וחיתוך עם ציר y :

ציר x - נציב $g(x) = 0$ בתבנית הפונקציה ונמצא עבור אילו ערכי

$$\frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 4} = 0 \cdot (x - 4) \neq 0$$

x פונקציה חותכת את הציר - הפונקציה $\sqrt{x^2 - 2x} = 0$
 $x = 0; 2$

חותכת את ציר ה- x בנקודות $(0,0)$ ו- $(2,0)$.

לגבי ציר y - מציבים $x = 0$ בפונקציה ומקבלים את נקודת החיתוך $(0,0)$ שכבר מצאנו.

מסקנה- פונקציה חותכת את הצירים בנקודות $(0,0)$ ו- $(2,0)$.

(3) אסימפטוטה אנכית של הפונקציה היא ישר מהצורה $x = k$ שהפונקציה מתקרבת אליו. במקרה שלנו- זה קורה כאשר המכנה מתאפס, כלומר- אסימפטוטה אנכית היא $x = 4$.
 אסימפטוטה אופקית היא ישר מהצורה $y = k$ שגרף הפונקציה מתקרב אליו, כאשר $|x| = \infty$.

נבדוק מהם ערכי הפונקציה, אחרי שנחלק מונה ומכנה ב- x (פעולת החילוק של מונה ומכנה באותו מספר לא משנה את הפונקציה).

$$g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{4}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2}}}{1 - \frac{4}{x}} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{2}{x}}}{1 - \frac{4}{x}} \right) = \frac{\sqrt{1 - 0}}{1 - 0} = \frac{1}{1} = 1$$

כעת נחלק את הפונקציה ב- x ונמצא למה מתקרבים ערכי הפונקציה

כאשר $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{-x}}{\frac{x}{-x} - \frac{4}{-x}} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\sqrt{\frac{x^2}{(-x)^2} - \frac{2x}{x^2}}}{\frac{4}{x} - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2}}}{\frac{4}{x} - 1} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\sqrt{1 - \frac{2}{x}}}{\frac{4}{x} - 1} \right] = \frac{\sqrt{1 - 0}}{0 - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

לסיכום- האסימפטוטות של הפונקציה הן $x = 4$, $y = 1$ עבור $x > 4$ ו-

$y = -1$ עבור $x < 0$

4) בשביל למצוא נקודות קיצון, נגזור את הפונקציה ונמצא את ערכי ה- x

שעבורם הפונקציה הנגזרת מתאפסת, ונצמצם אם אפשר:

$$g'(x) = \frac{(2x - 2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2x}} \cdot (x - 4) - \sqrt{x^2 - 2x} \cdot (x - 4)^2}{(x - 4)^2}$$

נעשה מכנה משותף $2\sqrt{x^2 - 2x}$:

$$g'(x) = \frac{(x-1) \cdot (x-4) - (x^2 - 2x)}{(x-4)^2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{x^2 - 5x + 4 - x^2 + 2x}{(x-4)^2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{4 - 3x}{(x-4)^2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x}}$$

נקודות קיצון מתקבלות כאשר הנגזרת מתאפסת, כלומר כאשר-

$$g'(x) = 0$$

$$\frac{4 - 3x}{(x-4)^2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x}} = 0 / \left([x-4]^2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x} \right) \neq 0$$

$$4 - 3x = 0$$

$$3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

הפתרון הזה יוצא מתחום ההגדרה של הפונקציה, כי- $0 < \frac{4}{3} < 2$, לכן אין

לפונקציה הנתונה נקודות קיצון.

לעומת זאת, יש לה תחומי עלייה וירידה.

$$\text{מתקיים } \frac{1}{(x-4)^2 \cdot \sqrt{x^2-2x}} > 0 \text{ לכל } x \text{ בתחום ההגדרה, ולכן מספיק}$$

למצוא את סימן הביטוי $4-3x$ וממנו נקבע את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$$\begin{array}{ll} 4-3x < 0 & 4-3x > 0 \\ \text{פונקציה יורדת.} & \text{פונקציה עולה.} \\ x < \frac{4}{3}; g'(x) < 0 & x > \frac{4}{3}; g'(x) > 0 \end{array}$$

עם תחום ההגדרה של הפונקציה נקבל, שהפונקציה עולה עבור $x > 4$ או

$2 < x < 4$. היא יורדת עבור $x < 0$.

לפני התיאור הגרפי, נבדוק איך הפונקציה מתנהגת עבור $x \rightarrow 4$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-4} = \frac{\sqrt{16-8}}{4^+-4} = \frac{\sqrt{8}}{0^+} \rightarrow +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-4} = \frac{\sqrt{16-8}}{4^--4} = \frac{\sqrt{8}}{0^-} \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

בעזרת כל הסעיפים הנ"ל, אפשר לצייר את הסקיצה של הגרף:

