

חזרה על החומר של חקירת פונקציה לשאלון 006- חלק א'

בדרך כלל הרבה שאלות בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי מכילות חלק של חקירת פונקציה- כתרגיל שלם או כחלק מסעיף בחשבון אינטגרלי.

נתחיל מחקירת פונקצית מנה.

פונקצית מנה היא פונקציה של מנת שני ביטויים, לדוגמה- $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{2x + 15}$.

בחקירת פונקצית מנה, צריך לשים לב לתחום הגדרה: תחום ההגדרה של פונקציות מנה הוא, ברוב המקרים, התחום שבו המכנה לא מתאפס. כמובן, ובאופן כללי אם יש פונקציות כמו טנגנס, פונקציות לוגריתמיות או פונקציות שורש- צריך לבדוק בנפרד לגבי כל אחד מהחלקים של הפונקציה, ולבסוף לאחד אותם לתחום משותף.

לדוגמה- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x + 4}$.

נבדוק בנפרד לגבי המונה והמכנה:

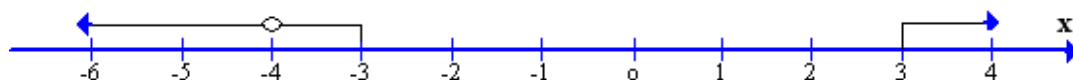
מונה- במונה מופיע שורש ממעלה זוגית של ביטוי מסוים. שורש כזה מוגדר רק כאשר הביטוי שבתוכו א-שלילי (חיובי או אפס). לכן- $x^2 - 9 \geq 0$.

זו פרבולה, שהיא א-שלילית בתחום $|x| \geq 3$ (מה משמעות הפתרון הזה?).

מכנה- כאשר המכנה מתאפס נקבל חילוק באפס שהיא פעולה לא מוגדרת. לכן

המכנה חייב להיות שונה מאפס- $x + 4 \neq 0$.
 $x \neq -4$

נאחד את התחומים, וניעזר בציר הבא:



לכן הפונקציה מוגדרת עבור $x > 3$ או $-4 < x < -3$ או $x < -4$.

כעת נמשיך הלאה..

הדבר הבא הוא נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה (תלוי בסדר שנותנים אותם).

נביט לדוגמה על הפונקציה- $g(x) = \frac{x-2}{x^2+5}$ ונחפש את נקודות הקיצון שלה.

נגזור-

$$g'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 5) - (x - 2) \cdot 2x}{(x^2 + 5)^2} = \frac{x^2 + 5 - 2x^2 + 4x}{(x^2 + 5)^2} = \frac{-x^2 + 4x + 5}{(x^2 + 5)^2} = 0 / \cdot (x^2 + 5)^2$$

$$-x^2 + 4x + 5 = 0$$

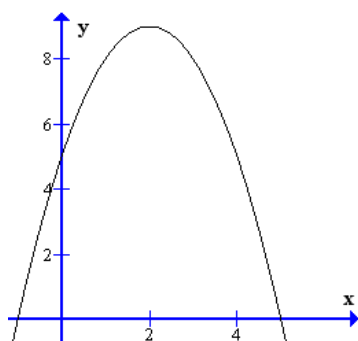
$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-1) \cdot 5}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{-2} = \frac{-4 \pm 6}{-2}$$

$$x_1 = -1; x_2 = 5$$

$$f(5) = \frac{5-2}{5^2+5} = \frac{3}{30} = 0.1 \quad f(-1) = \frac{-1-2}{(-1)^2+5} = -\frac{3}{6} = -0.5$$

נציב בפונקציה-
(5,0.1) (-1,-0.5)

כעת נסווג את הנקודות- בנגזרת הראשונה, הביטוי $\frac{1}{(x^2+5)^2} > 0$ לכל x והוא לא



משפיע על סימן הנגזרת.

הפרבולה $-x^2 + 4x + 5$ נראית כמו בסקיצה משמאל- והיא

חיובית עבור $-1 < x < 5$.

היא שלילית עבור $x > 5$ או $x < -1$.

אלו תחומי העלייה והירידה של הפונקציה- ומכאן:

$$(5, 0.1) \max \quad (-1, -0.5) \min$$

כעת נעבור ל: מציאת **אסימפטוטות וחורים** בפונקציה.

בשביל להבין מה זה "חור" בפונקציה, נתבונן בפונקציה הבאה - $t(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$.

אם ננסה להציב $x=1$ בפונקציה, נקבל $0/0$ - ביטוי לא מוגדר (נסו ותראו...).

נצמצם את הפונקציה בהנחה ש- $x \neq 1$, ונקבל - $t(x) = \frac{x \cdot (x-1)}{x-1} = x$. בכך בעצם

"עקפנו" את המכשול שהיה לנו מקודם, שבגללו נתקלנו בסתירה. שיעור ה"חור" הוא $(1,1)$.

לסיכום - "חורים" בפונקציה נוצרים כאשר גם המונה וגם המכנה מתאפסים עבור ערך מסוים של המשתנה x . בשביל למצוא את שיעור ה- y שלהם, צריך לפרק לגורמים את המונה והמכנה ולצמצם כמה שאפשר.

בפונקציה המצומצמת מציבים את הנקודה הבעייתית ומוצאים את שיעור החור. מסמנים חורים כעיגולים ריקים על גרף הפונקציה.

אם הנקודה מאפסת את המכנה ולא את המונה בפונקציה המצומצמת, זה לא יהיה חור בפונקציה אלא אסימפטוטה אנכית.

אסימפטוטות הן ישרים שגרף הפונקציה מתקרב אליהם כש- x שואף למספר מסוים. **אסימפטוטה אנכית** היא ישר מהצורה $x=k$, והוא מתקבל כשהמכנה מתאפס, אן כאשר

הארגומנט של הפונקציה $\tan[f(x)]$ שווה ל- $\pm \frac{\pi}{2} + \pi k$, או כאשר הארגומנט של

הפונקציה $\ln[g(x)]$ שווה לאפס.

אפשר למצוא אסימפטוטה אנכית בעזרת בדיקת התנהגות הפונקציה לידה, עבור ערכי x קרובים מאוד לנקודה החשודה - ובעצם, להיעזר בחישוב גבולות.

נביט לדוגמה בפונקציה $f = \frac{x+2}{x-1}$, ונסה למצוא אסימפטוטות אנכיות.

המכנה מתאפס כאשר $x=1$.

נבדוק האם זו יכולה להיות אסימפטוטה (במקרה הזה זו כן אסימפטוטה, אבל תמיד

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = \frac{1+2}{1^+-1} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

כדאי לבדוק ולראות מה יוצא):

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{x-1} = \frac{1+2}{1^--1} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

. קיבלנו שהפונקציה

שואפת לאינסוף בסביבת הנקודה $x=1$, לכן זו אסימפטוטה.

אסימפטוטה אופקית היא ישר מהצורה $y=k$ שאליו גרף הפונקציה מתקרב עבור ערכי x גדולים מאוד או קטנים מאוד.

בשביל למצוא אותה, צריך לחלק את תבנית הפונקציה כולה בחזקה הכי גבוהה של x , לצמצם ולהשאיר פעם לאינסוף ופעם למינוס אינסוף את מה שהתקבל- ואם מקבלים מספר, יש אסימפטוטה אופקית. אם לא- אין אסימפטוטה אופקית ויכולה להיות אסימפטוטה משופעת.

נביט לדוגמה בשלושת הפונקציות הבאות:

$$u = \frac{x^2+3}{\sqrt[3]{x}} \quad g = \frac{x+2}{x^3} \quad f = \frac{x^2-4}{2x^2+3}$$

נראה את השיטה עבור הפונקציה u . נסה את השיטה על השתיים האחרות.

בשביל למצוא אסימפטוטה אנכית בפונקציה u , נחלק ב- x^2 , החזקה הכי גבוהה של x שמופיעה בתבנית הפונקציה ונשאיר פעם לאינסוף ופעם למינוס אינסוף את מה שהתקבל.

$$u = \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2}} = \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}}} = x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \left(1 + \frac{3}{x^2}\right).$$

כשמחלקים בחזקה הכי גבוהה של x את המונה והמכנה לא משנים שום דבר בפונקציה..

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \left(1 + \frac{3}{x^2}\right) \right] = +\infty \cdot (+\infty) \cdot \left(1 + \frac{3}{\infty}\right) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \left(1 + \frac{3}{x^2}\right) \right] = -\infty \cdot (+\infty) \cdot \left(1 + \frac{3}{\infty}\right) = -\infty$$

לא קיבלנו ביטוי מספרי, אלא אינסוף- כלומר לפונקציה אין אסימפטוטות אופקיות.

כעת נדבר על חקירת פונקציות שורש- ונשים לב לכמה דברים שחשובים לפונקציות האלו.

כל תרגיל שמתחילים עם פונקציות שורש- בין אם הוא תרגיל בחקירת הפונקציה ובין אם הוא בעיית קיצון, כדאי ומומלץ לבדוק תחום הגדרה. מחוץ לתחום הזה אין על מה לדבר והפונקציה מקבלת ערכים מדומים (מספרים לא ממשיים, משהו כמו $\sqrt{-3}$). במספרים כאלו עוסקים בשאלון 07).

בעצם, תחום הגדרה של פונקציות שורש הוא התחום שבו הן אי-שליליות (חיוביות או אפס)- ואת זה צריך למצוא, בד"כ בעזרת שרטוט מקורב של גרף הפונקציה שבתוך השורש או ע"י פתירת אי-שוויון.

לפונקציות שורש יש משיקים שהשיפועים שלהם לא מוגדרים. איך?

נביט במשפט הבא-

"אם נתונה פונקציה מהצורה $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$, $n \neq 0; 1$, בנקודות שבהן $f(x) = 0$, שיפועי המשיקים לפונקציה לא מוגדרים".

ונוכיח אותו:

נגזור את הפונקציה $g(x)$ לפי x ונקבל-

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left[f(x)^{\frac{1}{n}} \right]' = \frac{1}{n} \cdot f(x)^{\frac{1}{n}-1} \cdot f'(x) \\ &= \frac{f'(x)}{n} \cdot f(x)^{\frac{1-n}{n}} = \frac{f'(x)}{n} \cdot f(x)^{-\left[\frac{n-1}{n}\right]} = \frac{f'(x)}{n} \cdot \frac{1}{f(x)^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{f'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{f(x)^{n-1}}} \end{aligned}$$

עכשיו נשאיף את $f(x)$ לאפס ונמצא מהו שיפוע המשיק:

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{f(x) \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{f(x)^{n-1}}} \right) = \frac{f'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{0^{n-1}}} = \frac{f'(x)}{0} \rightarrow \pm\infty$$

הסבר- בעצם מצאנו את ערך הנגזרת הראשונה של הפונקציה g כאשר הפונקציה הפנימית מתאפסת. ערך הנגזרת בנקודה/ות האלו משתנה והוא תלוי בסימן הנגזרת של הפונקציה הפנימית. צורת הגרף בנקודות האלה תהיה "מאונכת" לציר ה- x .
לפונקציות שורש יכולות להיות אסימפטוטות אנכיות, אם הן חלק מפונקצית מנה-
ואפילו שתי אסימפטוטות אופקיות.