תרגיל חקירת פונקציה

חקור את הפונקציה

$$y = x^2 + \frac{8}{x}$$

לפי הסעיפים הבאים: תחום הגדרה של הפונקציה, נקודות קיצון, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות. שרטט גרף של הפונקציה.

תחום הגדרה

ניתן לראות כי הפונקציה מוגדרת עבור כל $x \neq 0$.

מציאת נקודות קיצון

על מנת למצוא את נקודות הקיצון של הפונקציה, נגזור את הפונקציה:

$$y' = 2x - \frac{8}{x^2}$$

כעת נשווה את הנגזרת לאפס על מנת למצוא נקודות חשודות כקיצון.

$$\begin{aligned} 2x - \frac{8}{x^2} &= 0 \\ 2x^3 - 8 &= 0 \\ x^3 &= 4 \\ x &= \sqrt[3]{4} = 1.59 \end{aligned}$$

על מנת לבדוק אם אכן הנקודה החשודה היא נקודת קיצון ואם כן מאיזה סוג נגזור את הפונקציה פעם נוספת.

$$y'' = 2 + \frac{16}{x^3} \tag{1}$$

נציב את הנקודה החשודה בנגזרת השנייה

$$y'(1.59) = 2 + \frac{16}{1.59^3} = 5.98 > 0$$

כיוון ש־ $y''(1.59) > 0$ נובע כי עבור $x = 1.59$ הפונקציה מקבלת מינימום. כלומר הנקודה $(1.59, 7.56)$ היא נקודת מינימום של הפונקציה.

מציאת נקודות פיתול

על מנת למצוא נקודות פיתול נבחן את הנגזרת השניה שמצאנו מקודם ב- (1) ונשווה אותה לאפס.

$$\begin{aligned} 2 + \frac{16}{x^3} &= 0 \\ 2x^3 + 16 &= 0 \\ x^3 &= 8 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

הנקודה $(-2,0)$ היא אפוא נקודה חשודה כנקודת פיתול. נגזור פעם שלישית ונקבל כי

$$\begin{aligned} y''' &= -\frac{48}{x^4} \\ y'''(-2) &= -\frac{48}{16} = -3 \neq 0 \end{aligned}$$

ועל כן הנקודה $(-2,0)$ היא אכן נקודת פיתול של הפונקציה.

תחומי קמירות וקעירות

$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x$
$y'' > 0$	—	$y'' < 0$	—	$y'' > 0$

מהטבלה אנו למדים כי הפונקציה קמורה $(\cup)$ עבור $x < -2$ וגם עבור $0 < x$. הפונקציה קעורה $(\cap)$ עבור $-2 < x < 0$.

שרטוט

על סמך החקירה שביצענו נוכל לשרטט את הפונקציה המבוקשת. ראה איור 1.

איור 1: