

עוד שאלה בחקירת פונקציות

שאלה

הישר $y = -1$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה $y = \frac{Ax - x^2 - 16}{Bx^2}$ (A ו-B הם פרמטרים).

שיפוע השיר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = -2$ הוא -6.5 .

א. מצאו את ערכי הפרמטרים A ו-B.

ב. עבור ערכי A ו-B שמצאתם בסעיף א מצאו:

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(3) אסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

(4) נקודות הקיצון של הפונקציה וסוגן.

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

פתרון

א. אם נחשב את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה נקבל:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Ax - x^2 - 16}{Bx^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{A}{x} - 1 - \frac{16}{x^2}}{B} = -B = -1$$

ולכן $B = 1$.

נחשב את נגזרת הפונקציה:

$$y = \frac{Ax - x^2 - 16}{x^2} = \frac{A}{x} - 1 - \frac{16}{x^2}$$
$$y' = -\frac{A}{x^2} - 2 \cdot \frac{16}{x^3} = -\frac{A}{x^2} + \frac{32}{x^3}$$

שיפוע המשיק שווה לערך הנגזרת בנקודה, ולכן

$$y'(-2) = -\frac{A}{(-2)^2} + \frac{32}{(-2)^3} = -\frac{A}{4} - 4 = -6.5$$

$$-A - 16 = -26$$

$$A = 10$$

ב. עבור הערכים $B=1$ ו- $A=10$: $y = \frac{10x - x^2 - 16}{x^2}$.

(1) תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x \neq 0$.

(2) הפונקציה לא חותכת את ציר y כי אינה מוגדרת עבור $x=0$. נבדוק האם

יש נקודות חיתוך עם ציר x על ידי השוואת הפונקציה ל-0:

$$y = \frac{10x - x^2 - 16}{x^2} = 0$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 16} = 5 \pm 3 \begin{matrix} 2 \\ 8 \end{matrix}$$

נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים הן $(2,0)$ ו- $(8,0)$.

(3) נתון כי $y = -1$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר x .

אסימפטוטה המקבילה לציר y תיתכן בנקודה $x=0$ בה הפונקציה אינה

מוגדרת, ואכן בנקודה זו:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x - x^2 - 16}{x^2} = -\infty$$

ולכן ציר ה- y הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.

(4) כיד למצוא את נקודות הקיצון של הפונקציה נשווה את נגזרתה ל-0:

$$y' = -\frac{10}{x^2} + \frac{32}{x^3} = 0$$

$$\frac{10}{x^2} = \frac{32}{x^3}$$

$$10x^3 = 32x^2$$

$$10x = 32$$

$$x = 3.2$$

לפונקציה יש נקודת קיצון יחידה ב- $x = 3.2$. כדי לסווגה, נחשב את סימן

הנגזרת השנייה בנקודה זו:

$$y'' = \frac{20}{x^3} - \frac{96}{x^4}$$

$$y''(3.2) = \frac{20}{(3.2)^3} - \frac{96}{(3.2)^4} = -0.305 < 0 \Rightarrow \max$$

ולכן לפונקציה יש נקודת קיצון יחידה – מקסימום מקומי. ערכה של

הפונקציה בנקודה זו הוא:

$$y(3.2) = \frac{10 \cdot 3.2 - (3.2)^2 - 16}{(3.2)^2} = 0.5625 = \frac{9}{16}$$

ג. סקיצה של גרף הפונקציה:

